MEF780 전기전자공학 및 실습

회로망 해석
Network Analysis

Jee-Hwan Ryu

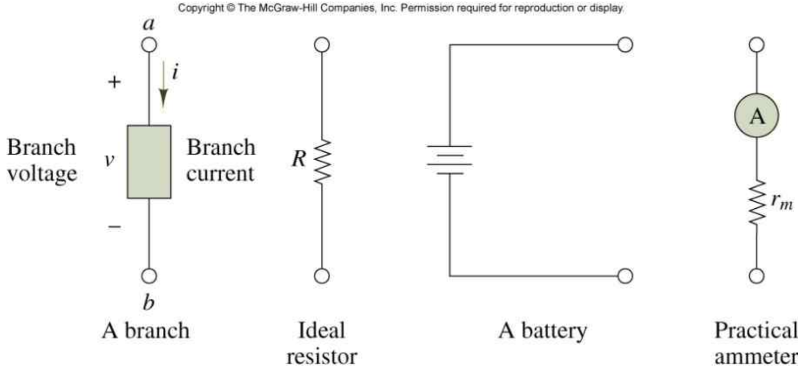
School of Mechanical Engineering
Korea University of Technology and Education

Topics

- 노드 전압 방법
- 망 전류 방법
- 중첩의 원리
- 테브닌 및 노턴 등가회로
- 최대 전력전달

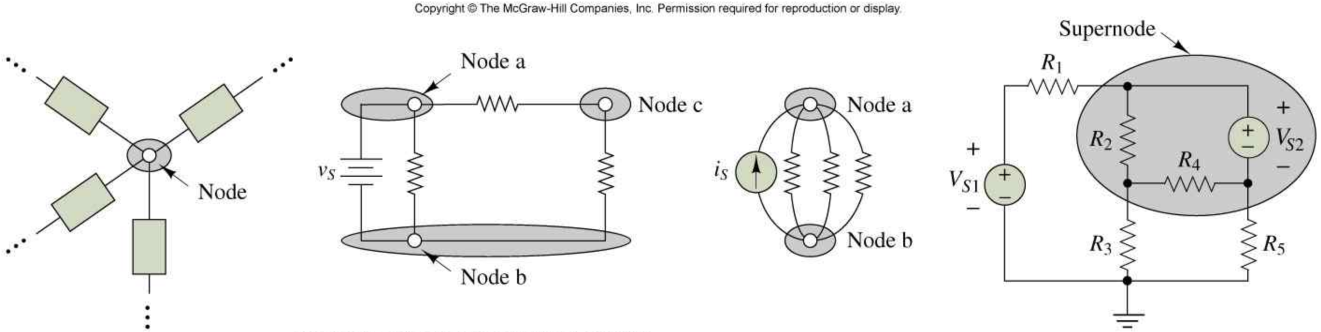
Definitions

- 분기 (branch): 두 단자를 갖는 회로의 임의의 부분, 하나 또는 그 이상의 회로 소자로 구성



Examples of circuit branches

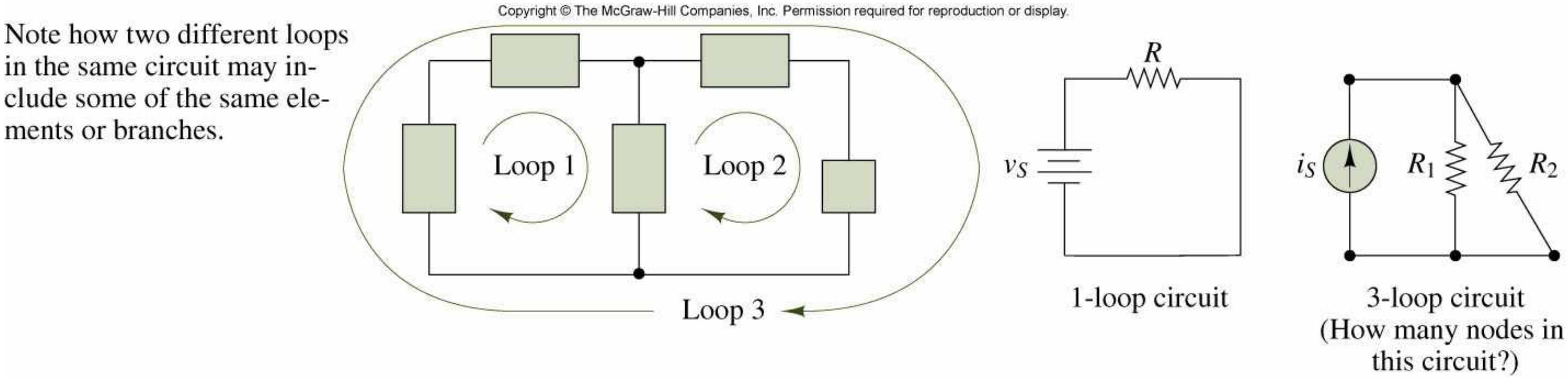
- 노드 (node): 한 개 또는 그 이상의 분기가 접합하는 곳



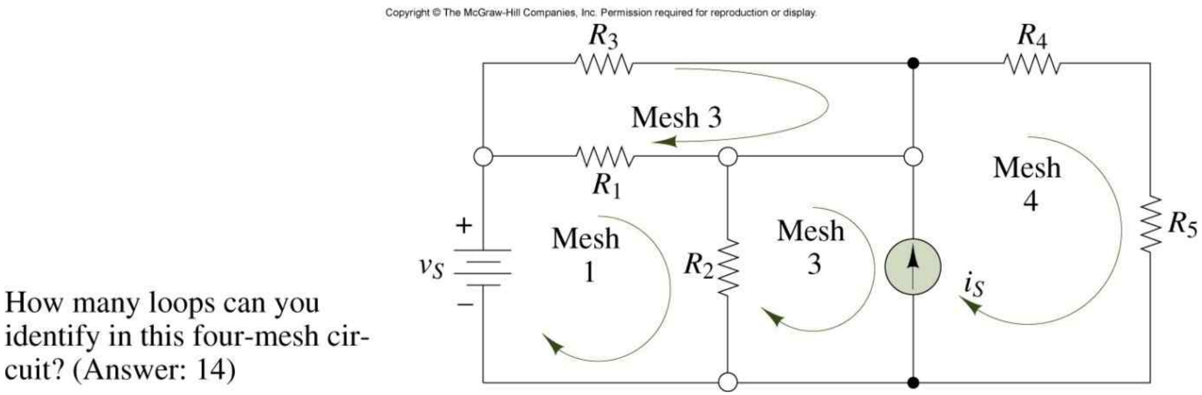
Examples of nodes in practical circuits

Definitions

- 루프(loop): 분기의 한쪽 단자에서 시작하여 동일한 분기의 반대쪽 단자에서 끝나는 폐회로



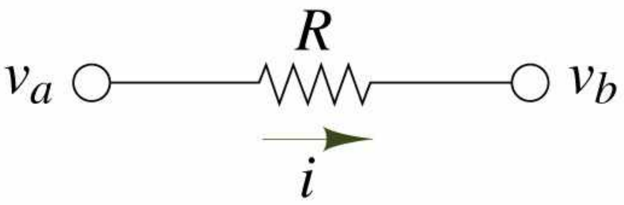
- 망(mesh): 다른 루프를 포함하지 않는 루프



노드 전압법 (node voltage method)

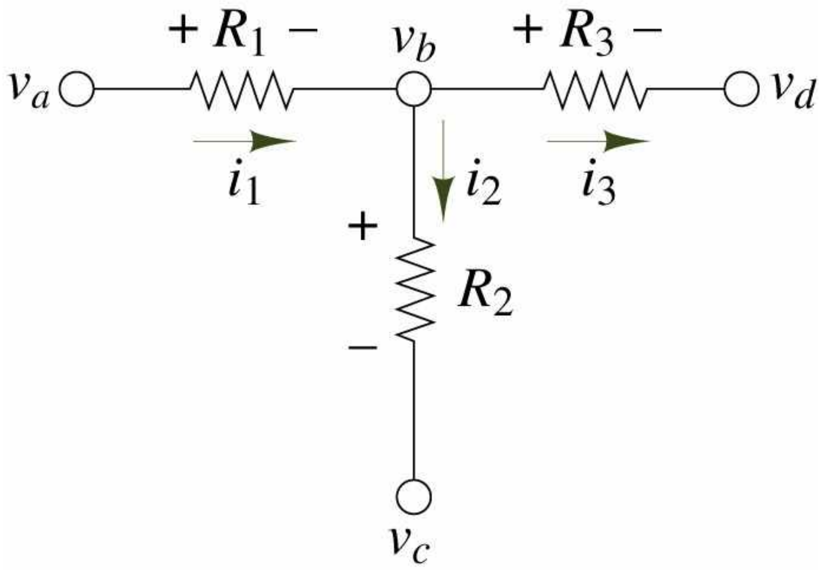
In the node voltage method, we assign the node voltages v_a and v_b; the branch current flowing from a to b is then expressed in terms of these node voltages.

$$i = \frac{v_a - v_b}{R}$$



By KCL: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$. In the node voltage method, we express KCL by

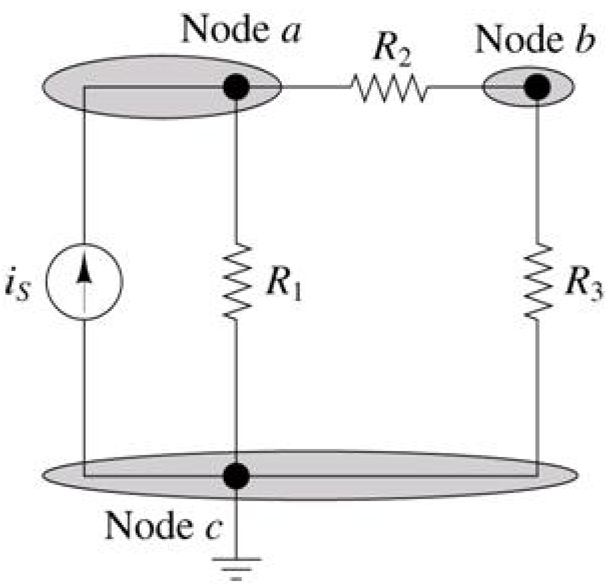
$$\frac{v_a - v_b}{R_1} - \frac{v_b - v_c}{R_2} - \frac{v_b - v_d}{R_3} = 0$$

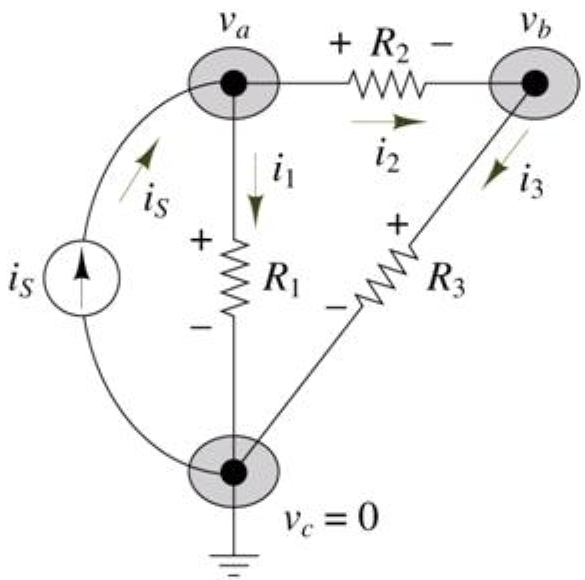


노드 전압법 (node voltage method) 절차

1. 기준노드 (보통 접지)를 선택한다. 이 노드는 보통 대부분의 소자들이 연결되어 있다. 다른 모든 노드전압은 이 노드를 기준으로 결정한다.
2. 남은 (N-1)개의 노드전압을 독립 또는 종속 변수로 정의한다. 회로에서 m개 전압원의 각각은 종속 변수와 관련된다. 노드가 전압원에 연결되어 있지 않다면, 그 노드의 전압은 독립변수로 취급된다.
3. 독립변수로 분류된 각 노드에 KCL을 적용하고, 각 분기 전류를 인접노드 전압의 항으로 나타낸다.
4. (n-1-m)개의 미지수로 구성된 연립방정식의 해를 구한다.

Example





전류방향 임의 선택

$$i_s - i_1 - i_2 = 0$$
$$i_2 - i_3 = 0$$
$$i_1 + i_3 - i_s = 0 \rightarrow redundant$$

$$i_s - \frac{v_a}{R_1} - \frac{v_a - v_b}{R_2} = 0$$
$$\frac{v_a - v_b}{R_2} - \frac{v_b}{R_3} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_a + \left(-\frac{1}{R_2}\right)v_b = i_s$$
$$\left(-\frac{1}{R_2}\right)v_a + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)v_b = 0$$

Example 1

$$I_1 = 10mA,\ I_2 = 50mA$$

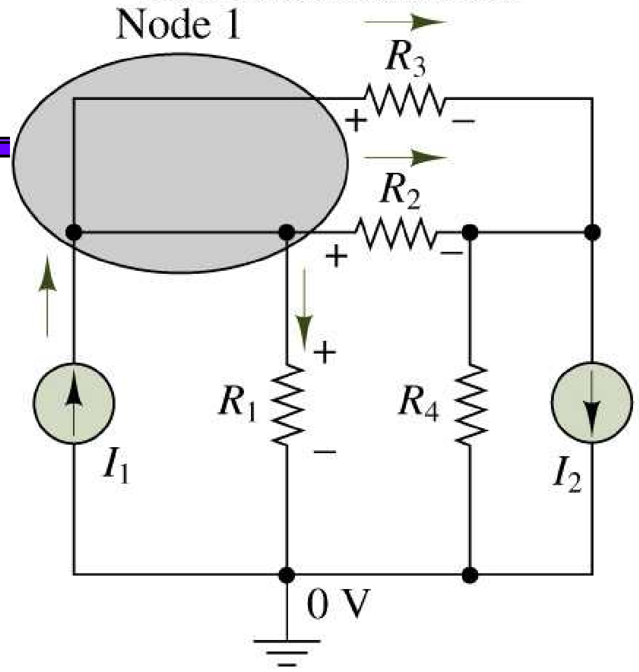
$$R_1 = 1k\Omega,\quad R_2 = 2k\Omega$$

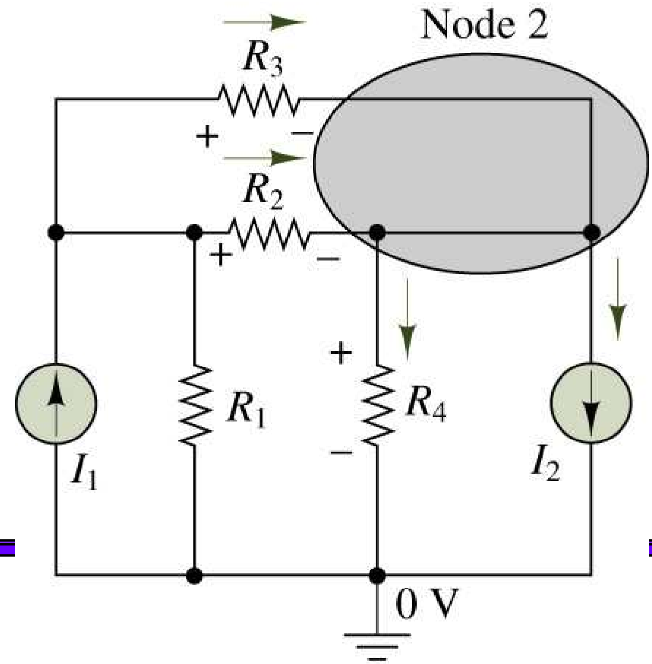
$$I_1 - \frac{v_1 - 0}{R_1} - \frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_1 - v_2}{R_3} = 0$$

$$\frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_2}{R_3} - \frac{v_2 - 0}{R_4} - I_2 = 0$$

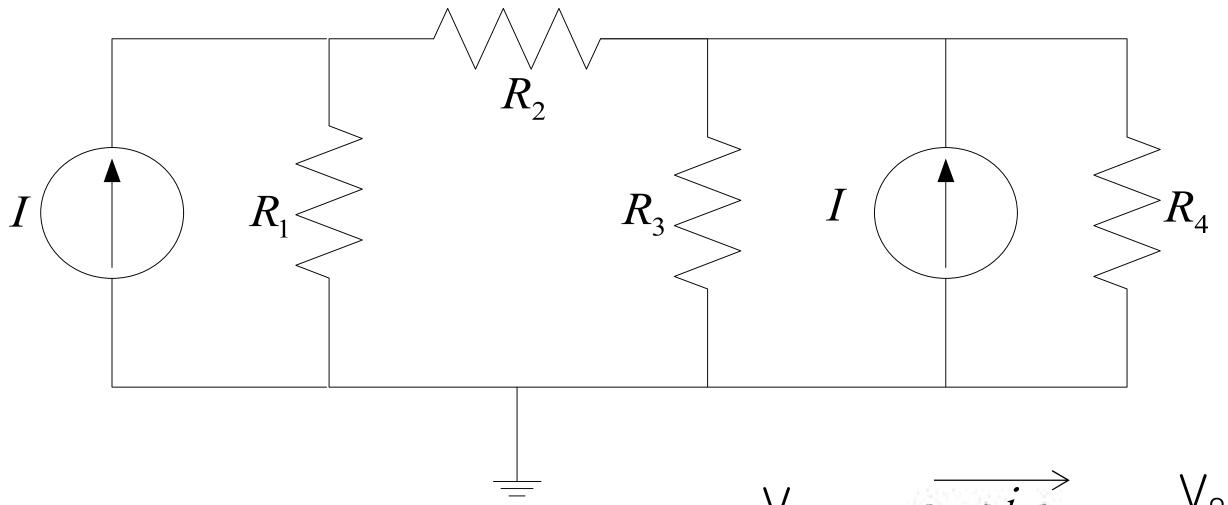
$$i_{R3} = 3.93mA$$

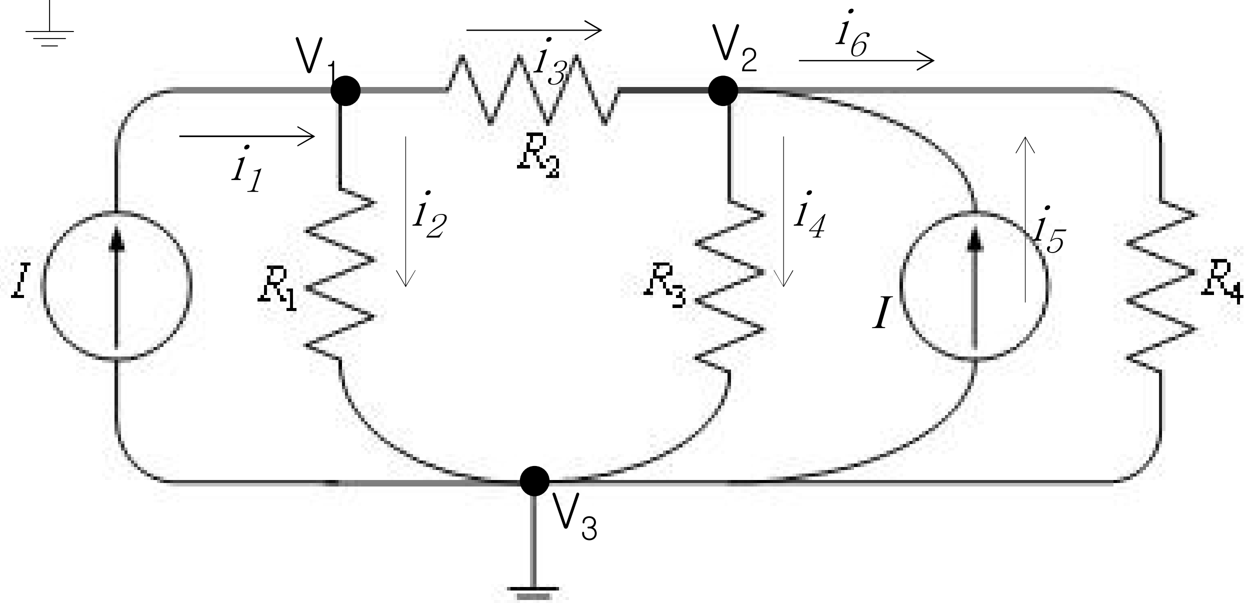
$$i_{R1} = -13.57mA$$



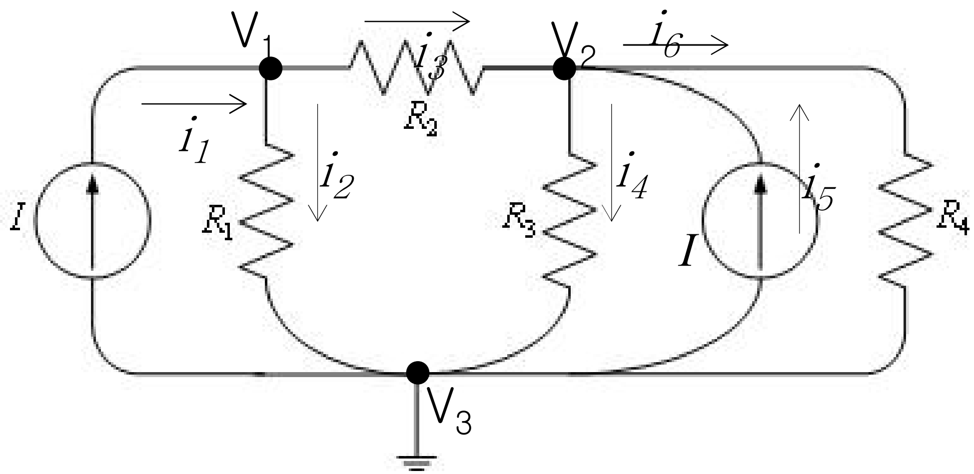


Example 2





Example 2



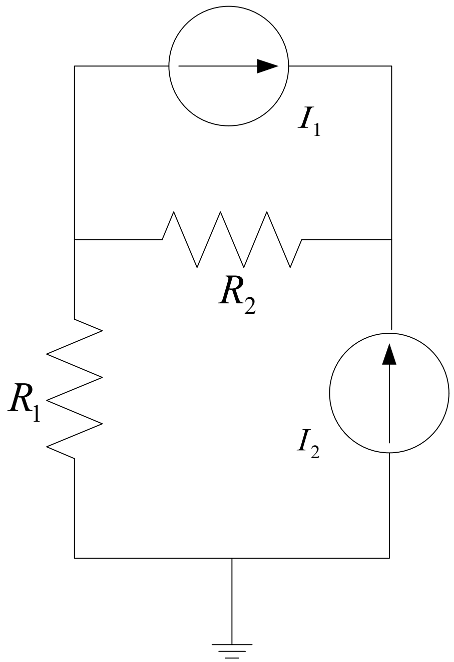
$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

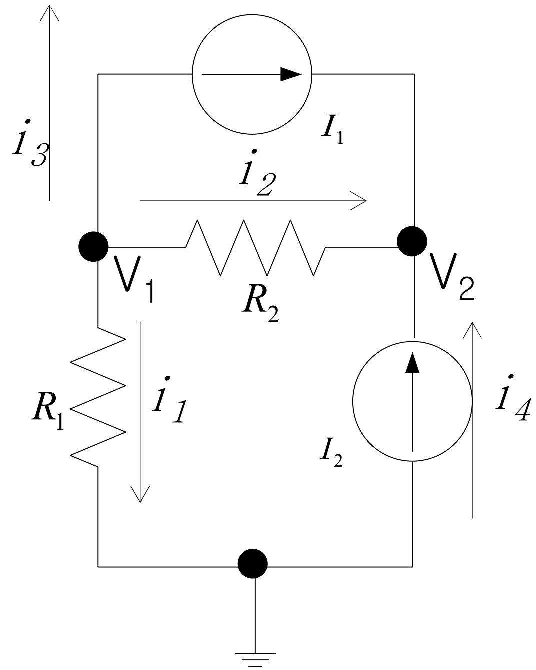
$$i_3 + i_5 - i_4 - i_6 = 0$$

$$I - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 0 \qquad \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)V_1 + \left(\frac{1}{R_2}\right)V_2 = -I$$

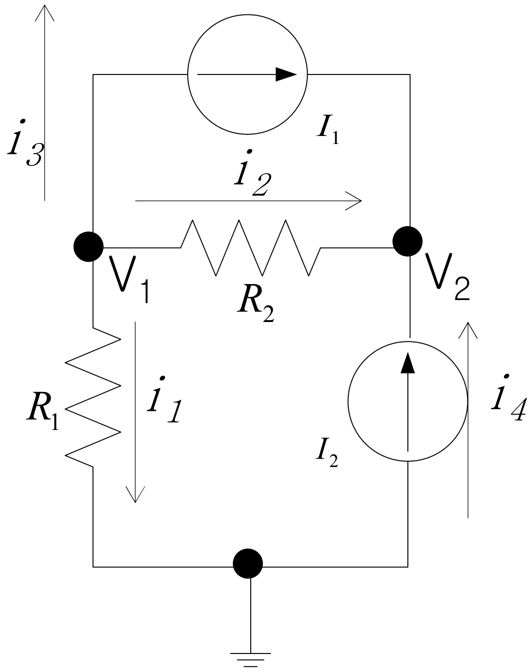
$$\frac{V_1 - V_2}{R_2} + I - \frac{V_2}{R_3} - \frac{V_2}{R_4} = 0 \qquad \left(-\frac{1}{R_2}\right)V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = I$$

Example 3





Example 3



$$-i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

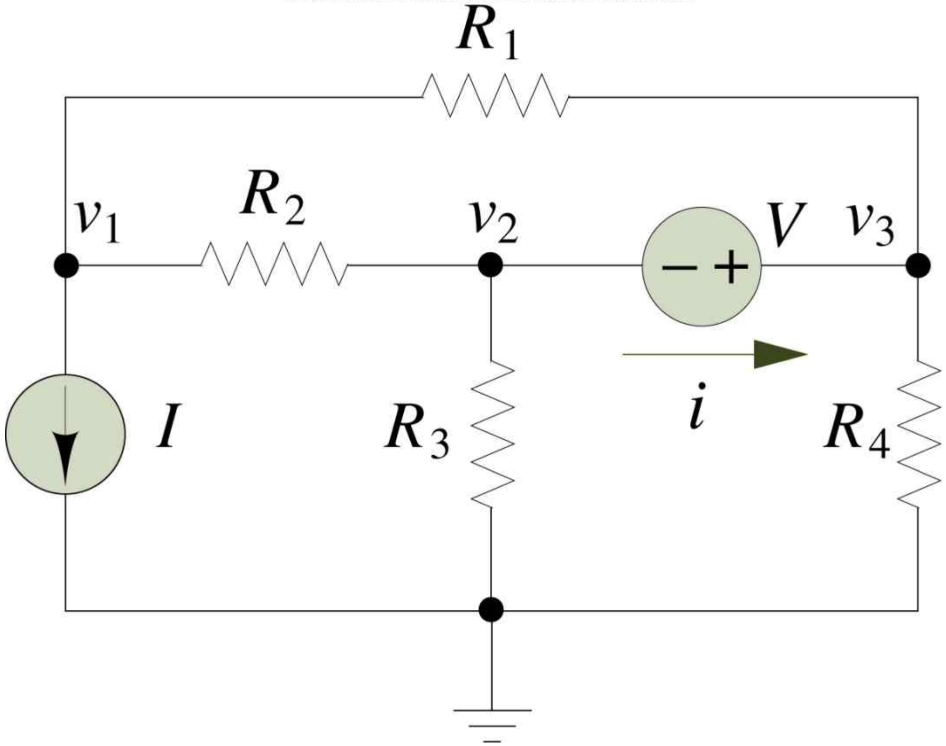
$$-\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_1 - V_2}{R_2} - I_1 = 0$$

$$\frac{V_1 - V_2}{R_2} + I_1 + I_2 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)V_1 + \left(\frac{1}{R_2}\right)V_2 = I_1$$

$$\left(\frac{1}{R_2}\right)V_1 + \left(-\frac{1}{R_2}\right)V_2 = -(I_1 + I_2)$$

전압원을 가진 노드 해석



$$\frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} - I = 0$$

$$\frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_2}{R_3} \boxed{- i} = 0$$

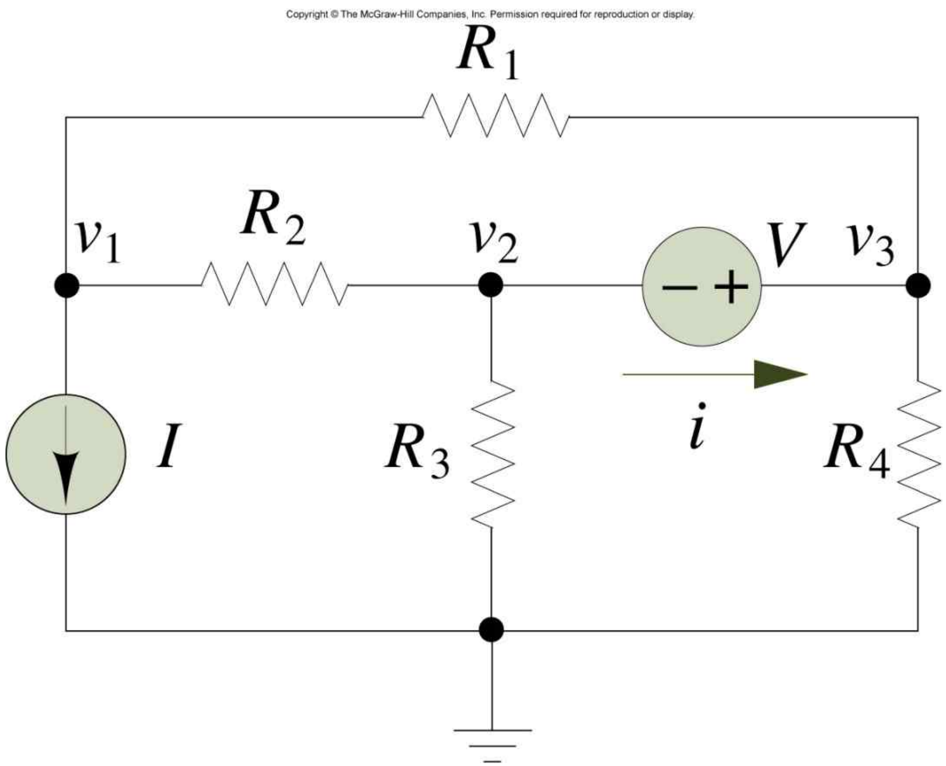
$$\boxed{i} = \frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_4}$$

$$R_1 = R_2 = 2\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = 3\Omega$$
$$I = 2A, V = 3V$$

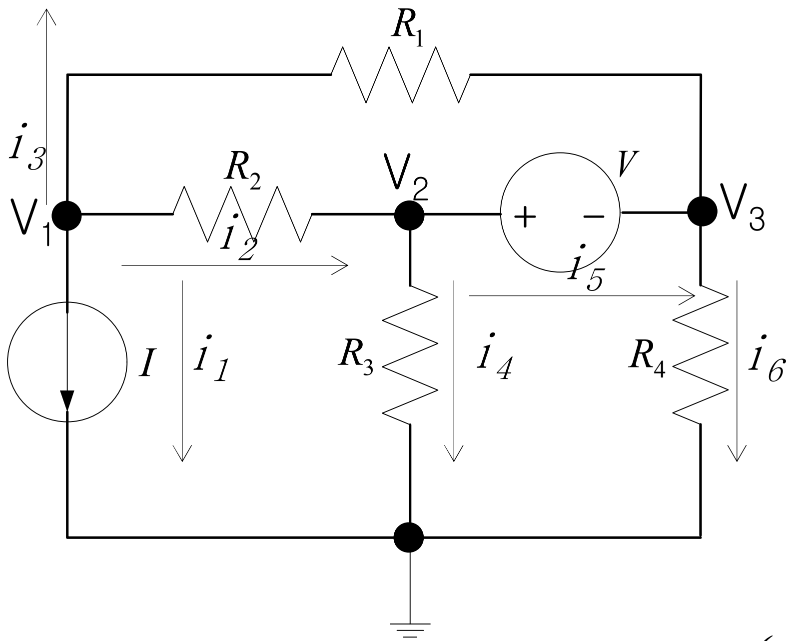
$$v_3 = v_2 + V$$

Example

- 다음 그림의 전압원의 방향을 반대로 하여



Example



$$-I-\frac{V_1-V_2}{R_2}-\frac{V_1-V_3}{R_1}=0$$

$$\frac{V_1-V_2}{R_2}-\frac{V_2}{R_3}-\boxed{i_5}=0$$

$$\frac{V_1-V_3}{R_1}+\boxed{i_5}-\frac{V_3}{R_4}=0$$

$$V_2=V_3+V$$

$$-i_1-i_2-i_3=0$$

$$i_2-i_4-i_5=0$$

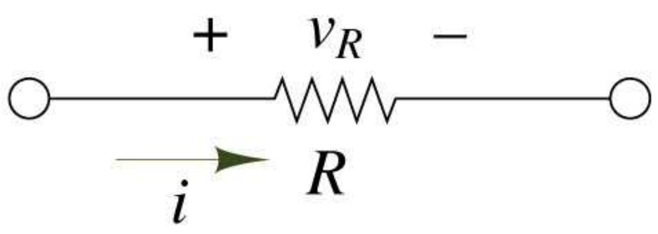
$$i_3+i_5-i_6=0$$

$$\left(-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)V_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)V_3=I-\frac{V}{R_2}$$

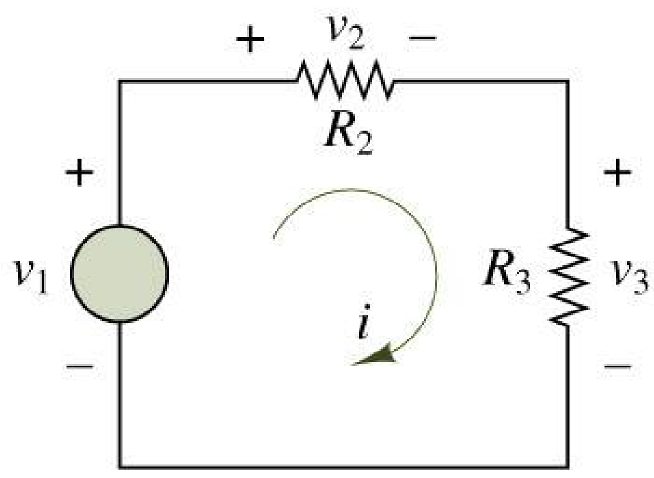
$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)V_1+\left(-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)V_3=\frac{V}{R_2}+\frac{V}{R_3}$$

망 전류법 (Mesh current method)

The current i, defined as flowing from left to right, establishes the polarity of the voltage across R.



Once the direction of current flow has been selected, KVL requires that $v_1 - v_2 - v_3 = 0$.

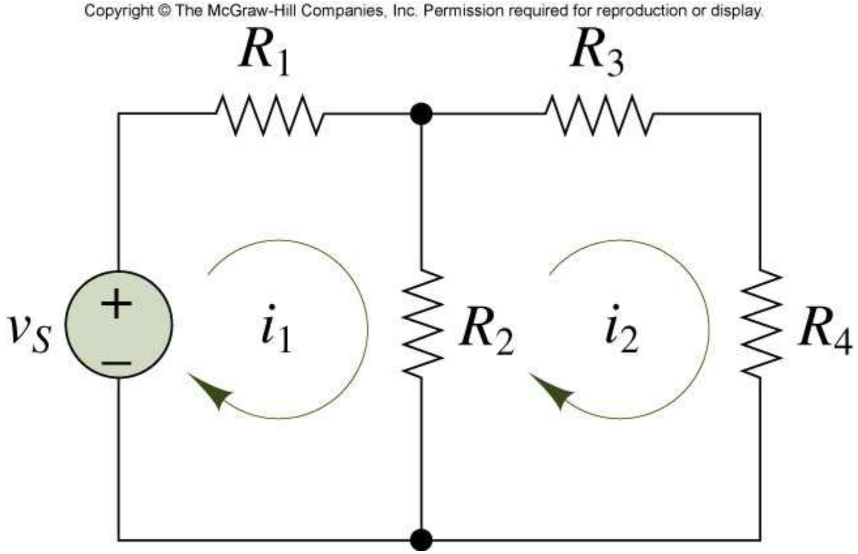


A mesh

망 전류법 (Mesh current method) 절차

1. 각 망 전류를 일관성 있게 정의한다. 미지의 망 전류는 항상 시계 방향으로 정의된다. 기지의 망 전류(즉, 전류원이 존재할 때)는 항상 전류원의 방향으로 정의된다.
2. n개의 망과 m개의 전류원을 갖는 회로에서 (n−m)개의 독립된 방정식이 존재한다. 미지의 망 전류는 (n−m)개의 독립 변수이다.
3. 미지의 망 전류를 포함하는 각 망에 KVL을 적용하고, 각 전압을 하나 또는 그 이상의 망 전류의 항으로 나타낸다.
4. (n−m)개의 미지수를 갖는 연립 방정식의 해를 구한다.

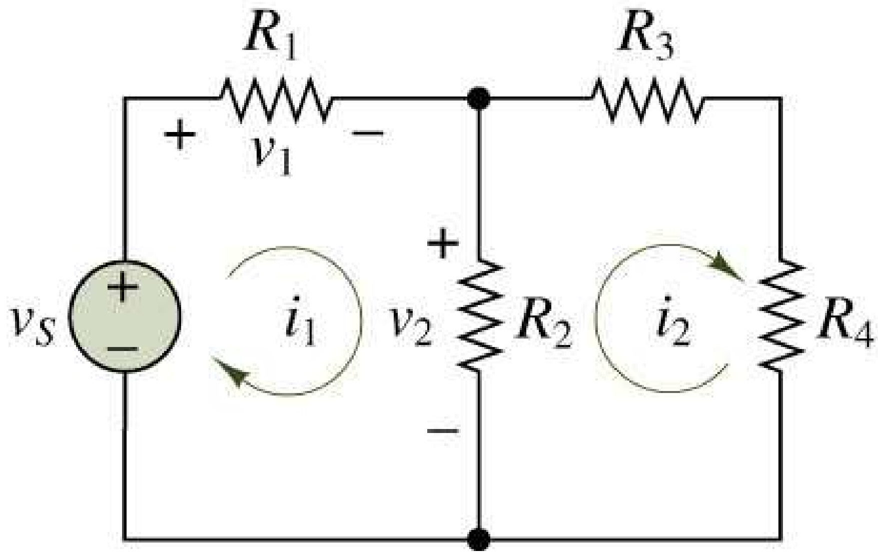
2개의 망을 가진 회로



Mesh 1: KVL requires that

$v_S - v_1 - v_2 = 0$, where $v_1 = i_1R_1$,

$v_2 = (i_1 - i_2)R_1$.



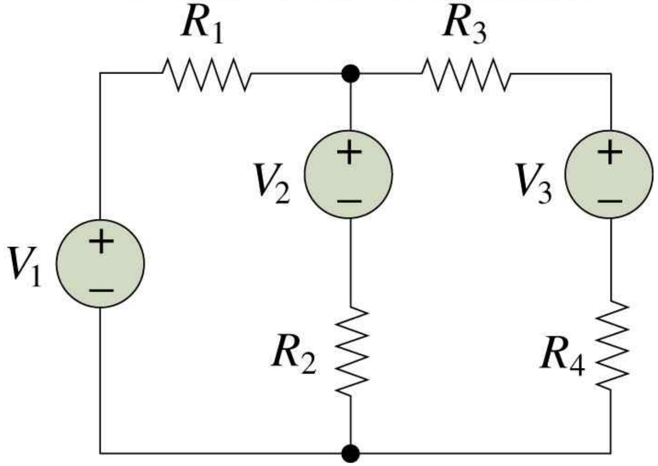
$$\text{Mesh 2}: v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

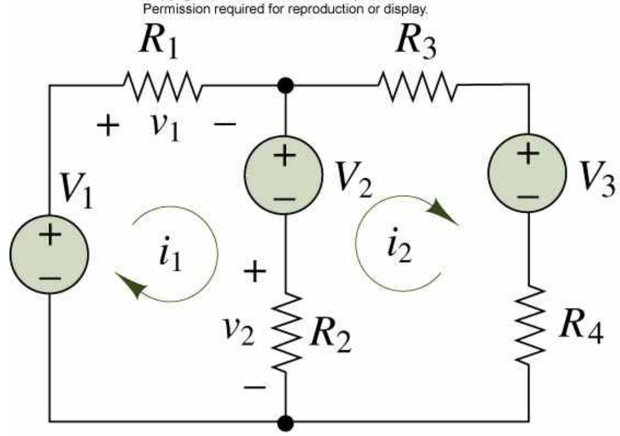
$$\text{where } v_2 = (i_2 - i_1)R_2$$

$$v_3 = i_2R_3$$

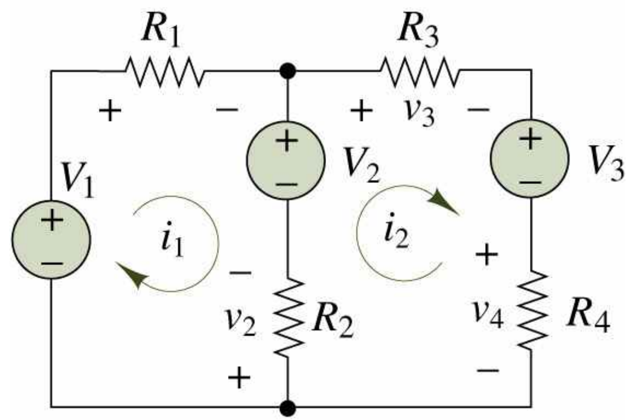
$$v_4 = i_2R_4$$

Example





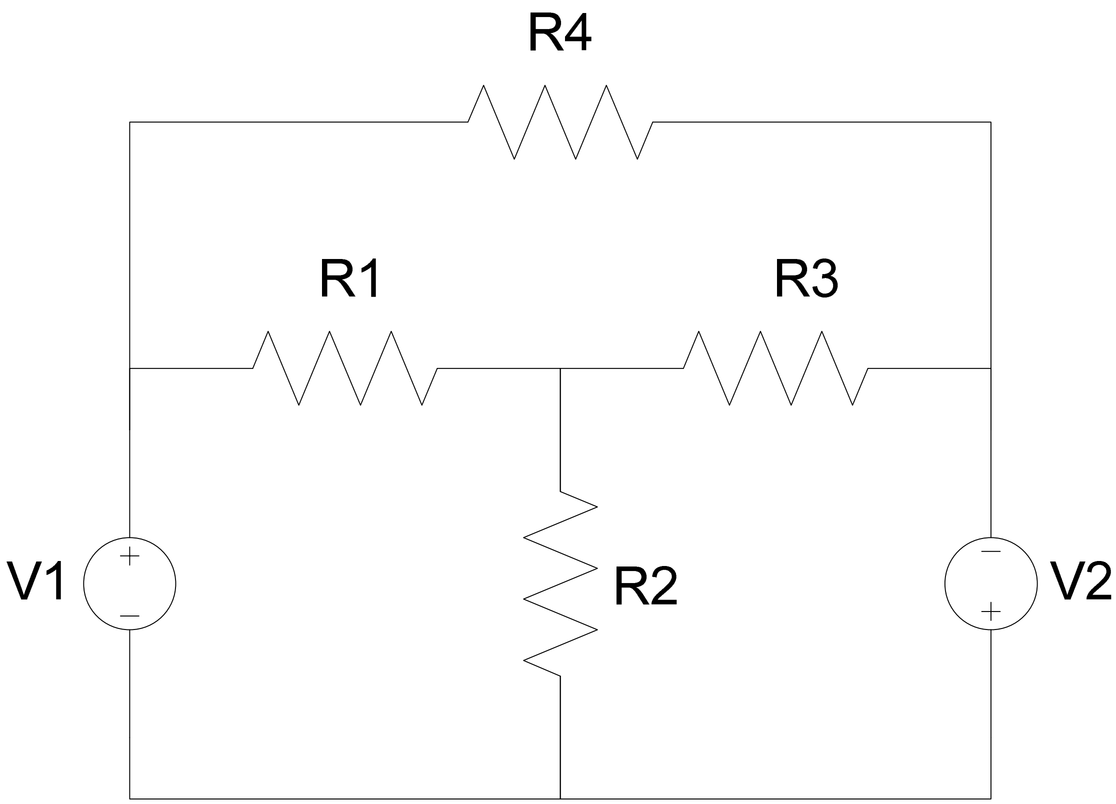
Analysis of mesh 1



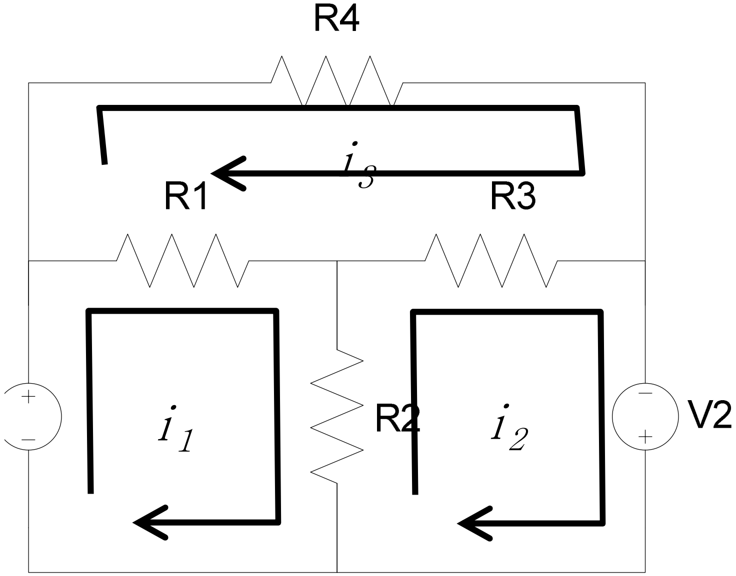
Analysis of mesh 2

$$V_1 - R_1 i_1 - V_2 - R_2 (i_1 - i_2) = 0$$
$$R_2 (i_1 - i_2) + V_2 - R_3 i_2 - V_3 - R_4 i_2 = 0$$

Example



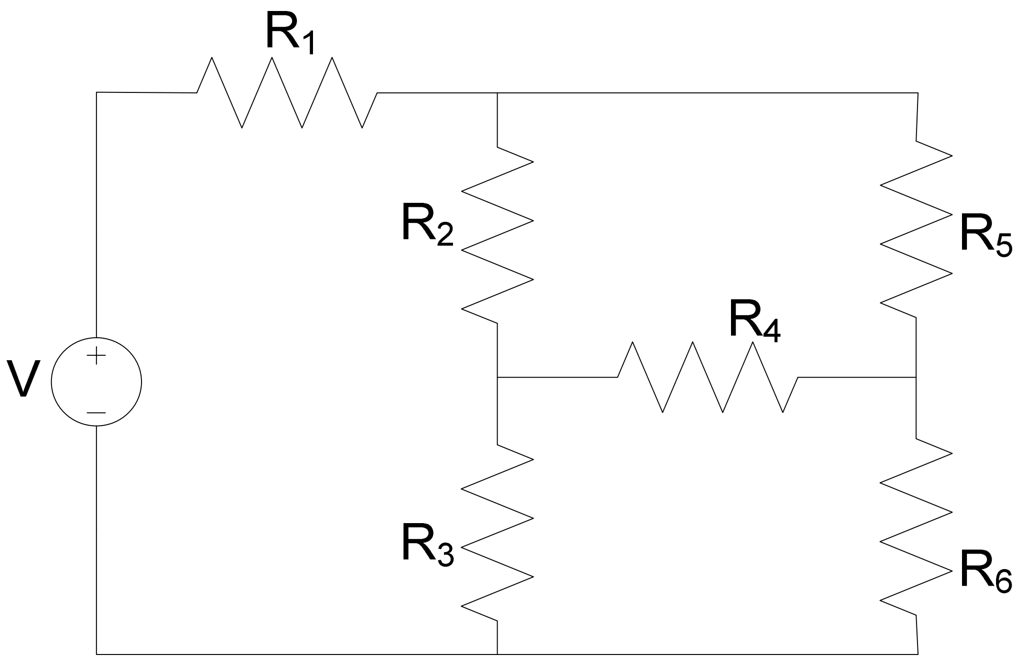
Example 1



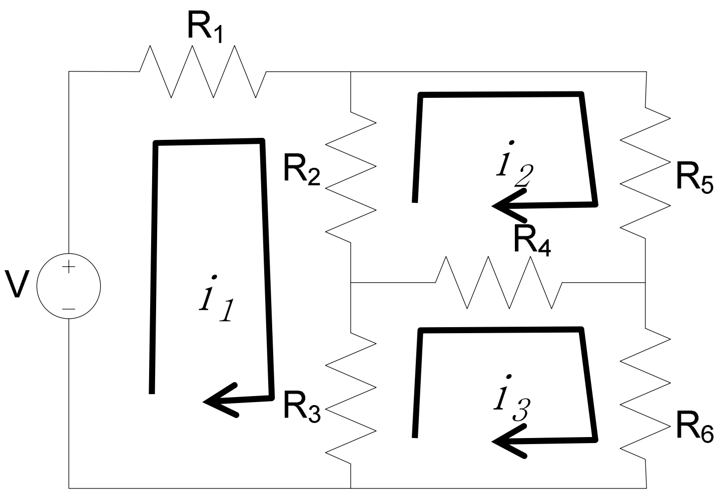
$$V_1 - R_1(i_1 - i_3) - R_2(i_1 - i_2) = 0$$
$$V_2 - R_2(i_2 - i_1) - R_3(i_2 - i_3) = 0$$
$$R_4 i_3 + R_3(i_3 - i_2) + R_1(i_3 - i_1) = 0$$

$$(-R_1 - R_2)i_1 + R_2 i_2 + R_1 i_3 = -V_1$$
$$R_2 i_1 + (-R_2 - R_3)i_2 + R_3 i_3 = -V_2$$
$$-R_1 i_1 - R_3 i_2 + (R_4 + R_3 + R_1)i_3 = 0$$

Example 2



Example 2



$$V_1 - R_1 i_1 - R_2\left(i_1 - i_2\right) - R_3\left(i_1 - i_3\right) = 0$$

$$R_2(i_2 - i_1) + R_5 i_2 + R_4(i_2 - i_3) = 0$$

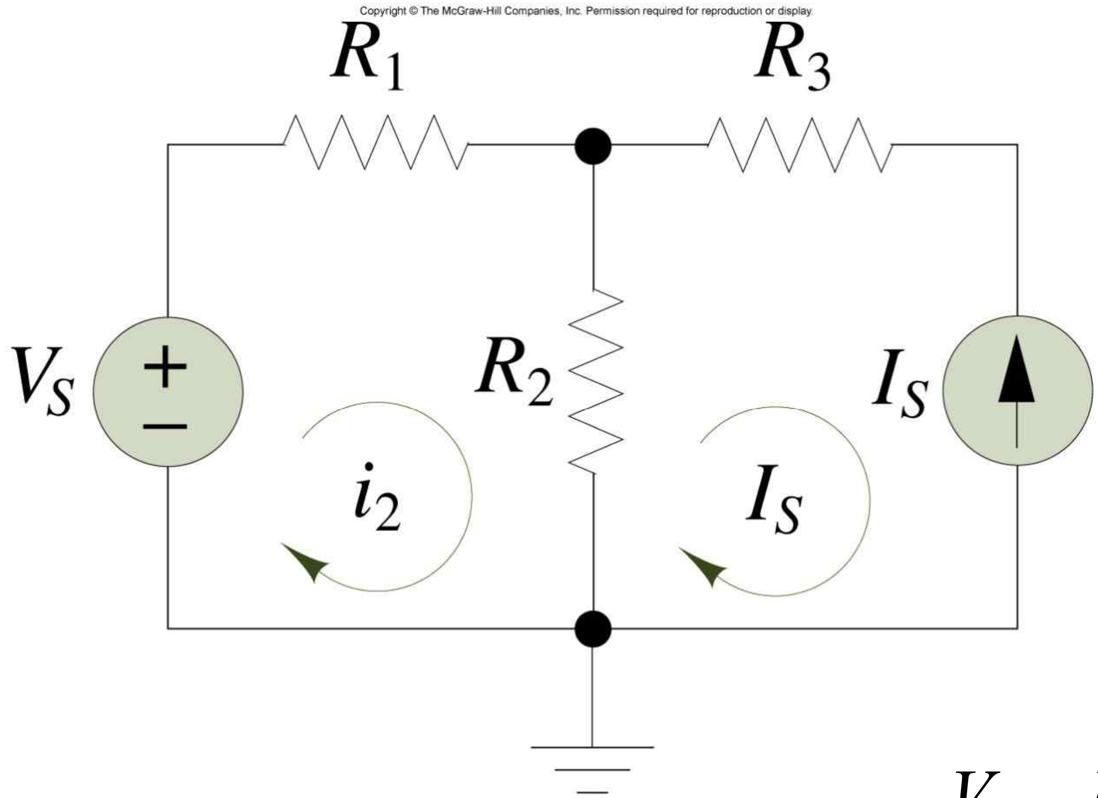
$$R_3(i_3 - i_1) + R_4(i_2 - i_3) + R_6 i_3 = 0$$

$$(-R_1 - R_2 - R_3)i_1 + R_2 i_2 + R_1 i_3 = -V_1$$

$$-R_2 i_1 + (R_2 + R_5 + R_4)i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$-R_3 i_1 + R_4 i_2 + (R_3 - R_4 + R_6)i_3 = 0$$

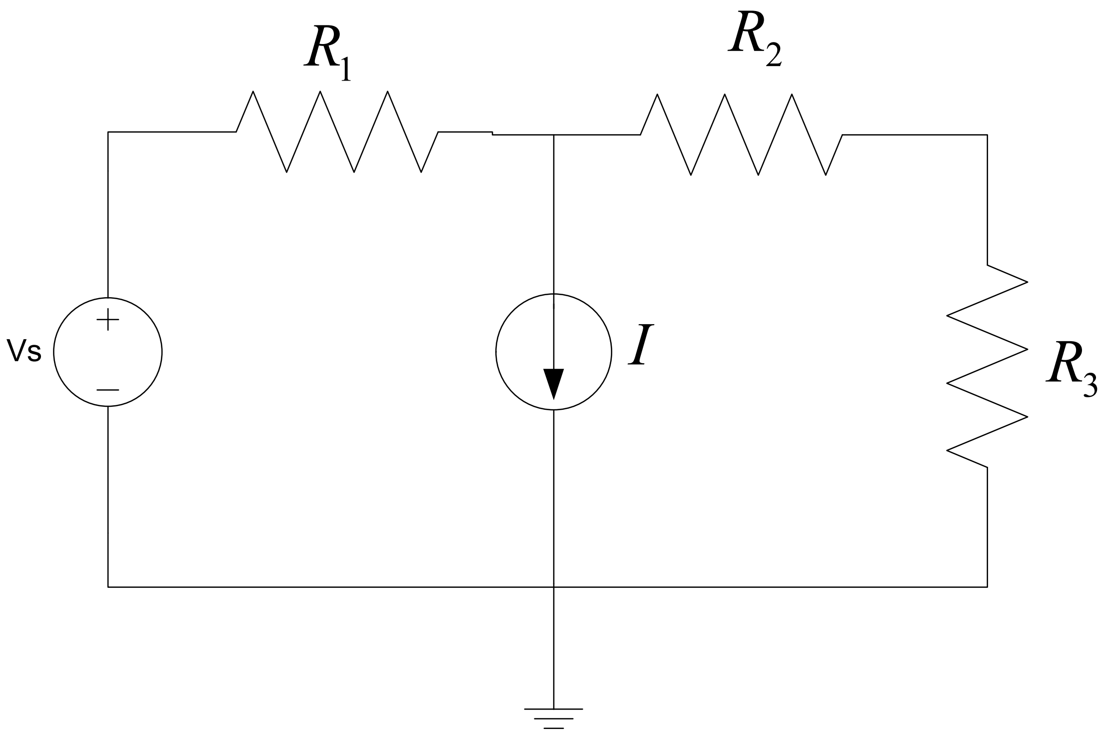
전류원을 가진 망 해석



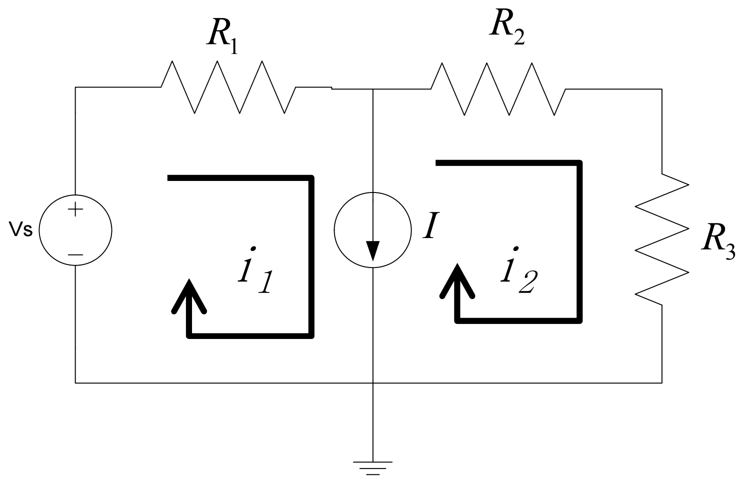
Simplify the Problem
Only one unknown current

$$V_s - R_1 i_2 - R_2(i_2 + I_s) = 0$$
$$(R_1 + R_2)i_2 = V_s - R_2 I_s$$

Example



Example

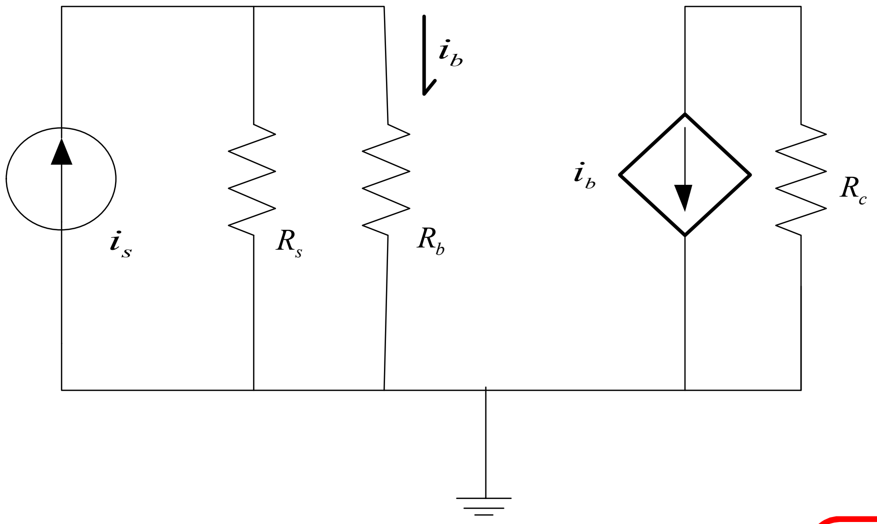


$$V_1 - R_1 i_1 \boxed{+V_x} = 0$$
$$R_2 i_2 + R_3 i_2 \boxed{-V_x} = 0$$

$$I = i_1 - i_2$$

$$R_1 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = 0$$
$$i_1 - i_2 = I$$

종속소스를 갖는 회로의 노드 및 망해석



$$i_S = v_1\left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_b}\right)$$

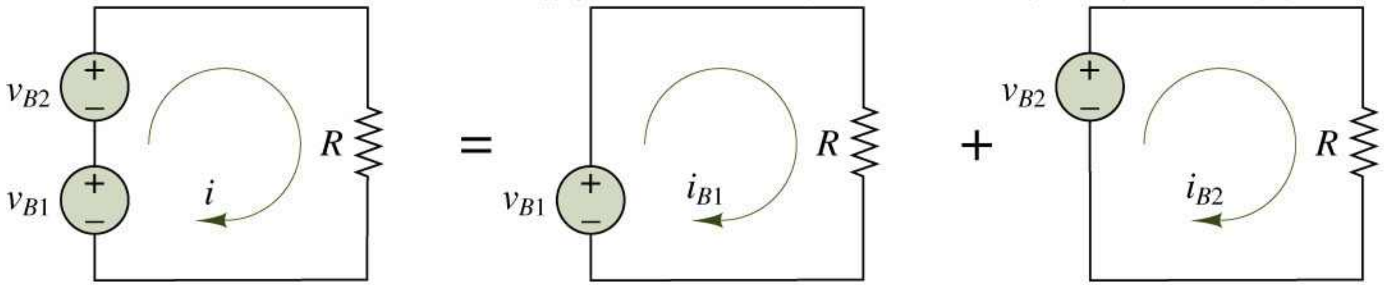
$$i_b + \frac{v_2}{R_C} = 0$$

$$i_b = i_S \frac{\frac{1}{R_b}}{\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_S}} = i_S \frac{R_S}{R_b+R_S}$$

$$-i_S \frac{R_S}{R_b+R_S} = \frac{v_2}{R_C}$$

중첩의 원리 (Principle of Superposition)

- N개의 소스를 포함하는 선형회로에서, 각 분기전압(또는 분기 전류)은 한 소스를 제외한 다른 모든 소스를 0으로 놓아 그 소스만을 포함하는 회로의 해를 구하여 얻게 되는 N개의 전압(또는 전류)의 합에 해당한다.



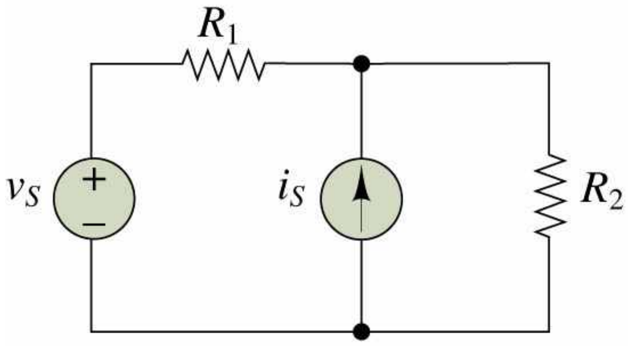
The net current through R is the sum of the individual source currents: $i = i_{B1} + i_{B2}$.

$$i = \frac{v_{B1} + v_{B2}}{R} = \frac{v_{B1}}{R} + \frac{v_{B2}}{R} = i_{B1} + i_{B2}$$

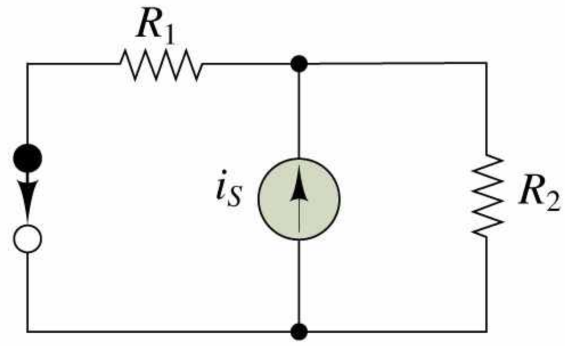
Note: 전압원을 단락회로로 대체

전압원과 전류원을 제거하는(0으로 만드는) 방법

1. In order to set a voltage source equal to zero, we replace it with a short circuit.

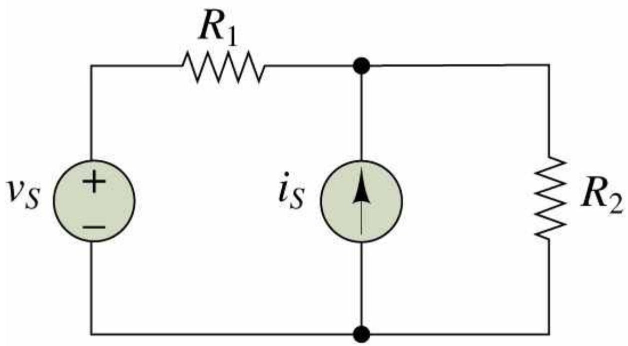


A circuit

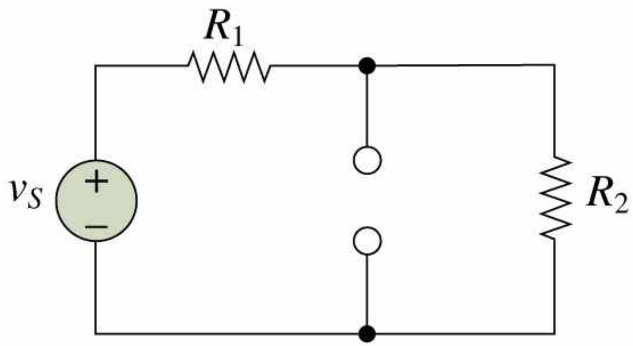


The same circuit with $v_S = 0$

2. In order to set a current source equal to zero, we replace it with an open circuit.



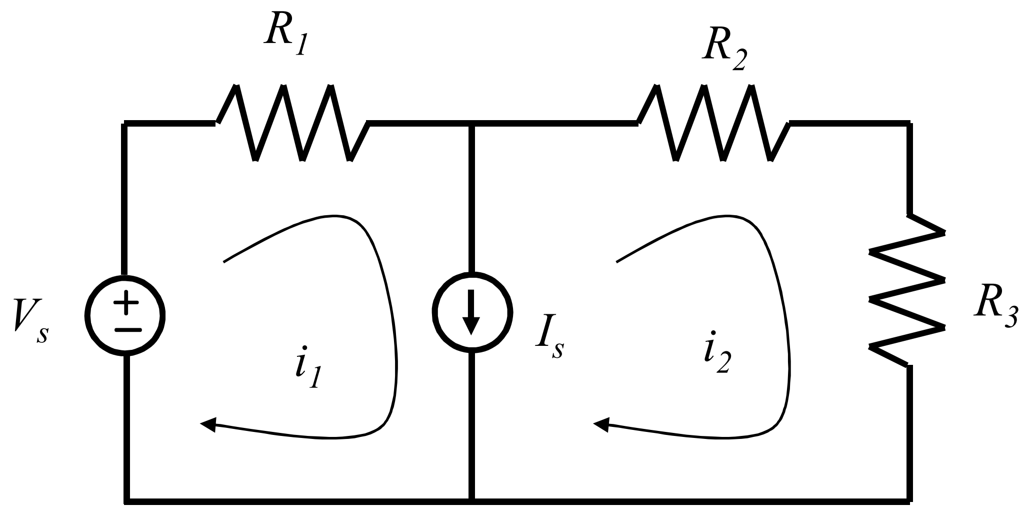
A circuit



The same circuit with $i_S = 0$

Example

- 중첩의 원리를 이용하여 회로에서 전류 $\boldsymbol{i_2}$ 를 구하여라.

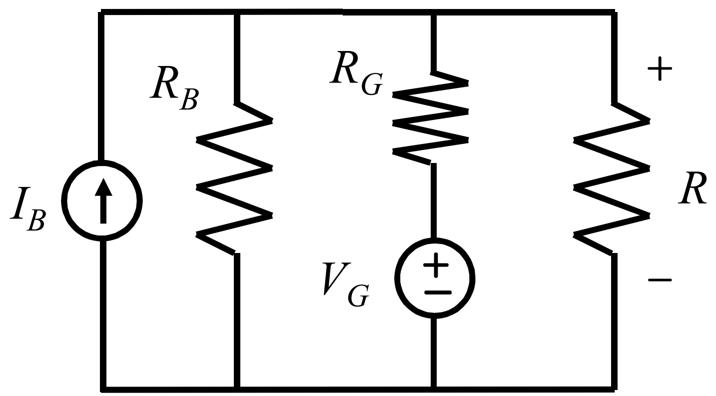


$$i_{2-V} = \frac{V_s}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$i_{2-I} = \frac{1/(R_2 + R_3)}{1/R_1 + 1/(R_2 + R_3)}(-I_s)$$

Example

- 저항 ***R***에 걸리는 전압을 구하여라.



Superposition

$$I_B - \frac{V_{R-I}}{R_B} - \frac{V_{R-I}}{R_G} - \frac{V_{R-I}}{R} = 0$$

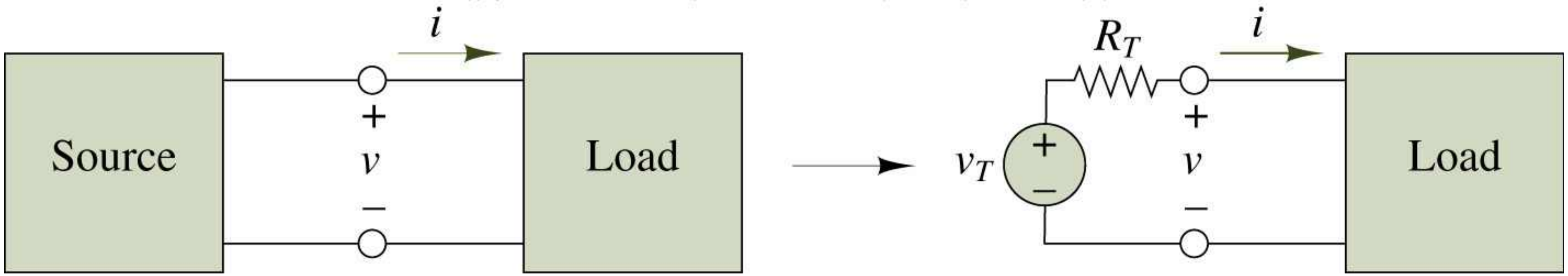
$$\frac{V_{R-V}}{R_B} + \frac{V_{R-V}}{R} + \frac{V_{R-V} - V_G}{R_G} = 0$$

KCL

$$I_B - \frac{V_R}{R_B} - \frac{V_R - V_G}{R_G} - \frac{V_R}{R} = 0$$

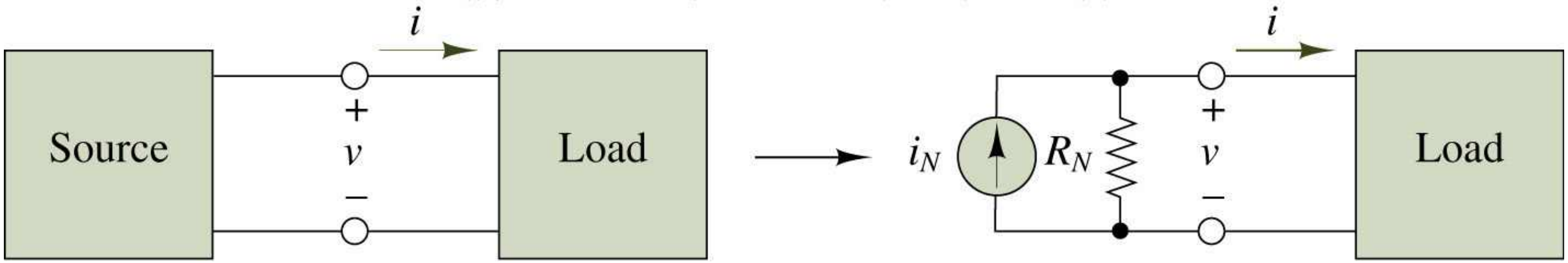
테브닌의 정리 (Thevenin Theorem)

- 부하의 관점에서 보면 이상 전압원, 전류원 및 선형 저항으로 구성된 어떠한 회로라도 이상 전압원 v_t와 등가 저항 R_t가 직렬 연결된 등가 회로로 나타낼 수 있다.



노턴의 정리 (Norton Theorem)

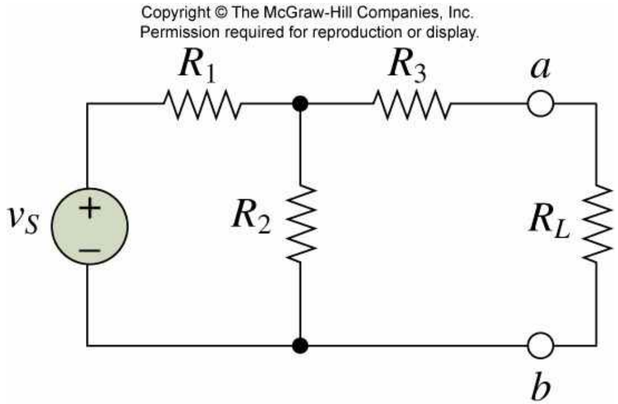
- 부하의 관점에서 보면 이상 전압원, 전류원 및 선형 저항으로 구성된 어떠한 회로라도 이상 전류원 i_N과 등가 저항 R_N이 병렬 연결된 등가 회로로 나타낼 수 있다.



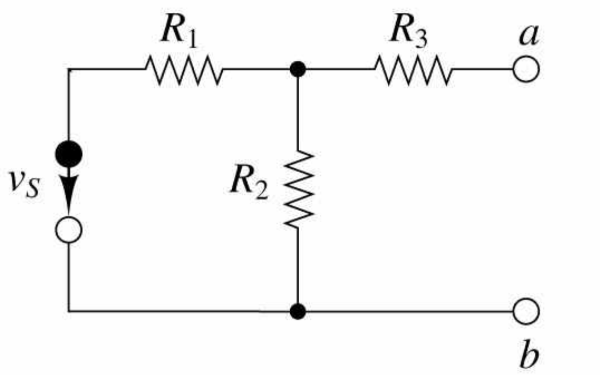
테브닌 또는 노턴 등가 저항의 결정

- 방법 및 절차
  1. 부하를 제거하라
  2. 모든 전압원과 전류원을 제거하라
  3. 부하를 제거한 채로 부하 단자 사이의 총 저항을 계산하라. 이 저항은 부하 대신에 회로에 연결된 전류원이 만나게 되는 저항과 등가이다.
- 테브닌과 노턴 등가 저항은 동일

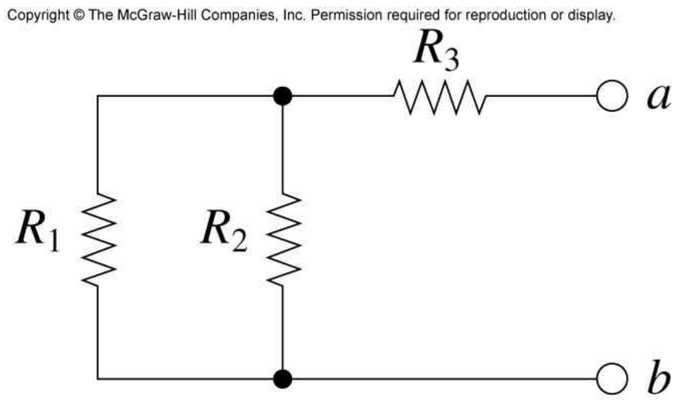
테브닌 또는 노턴 등가 저항의 결정

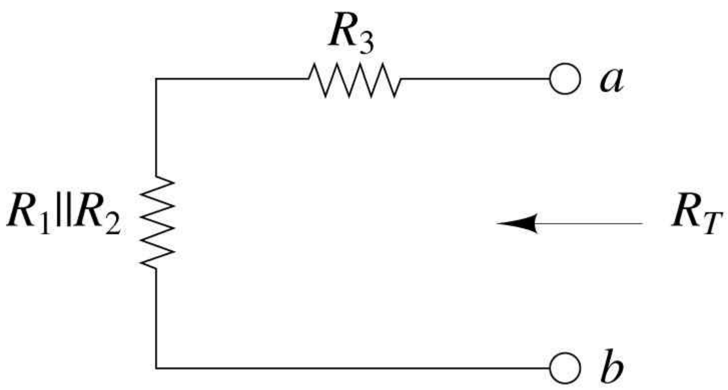


Complete circuit

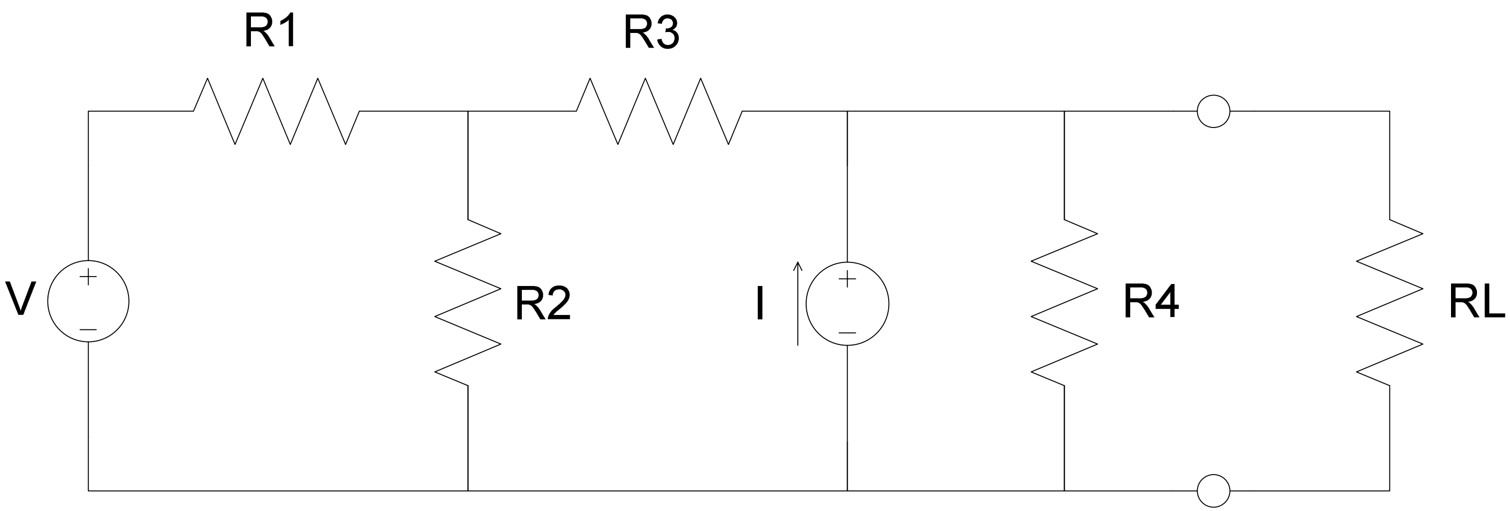


Circuit with load removed for computation of R_T. The voltage source is replaced by a short circuit.



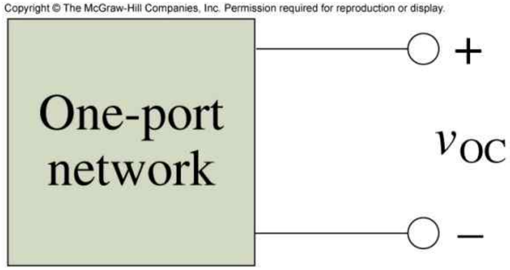


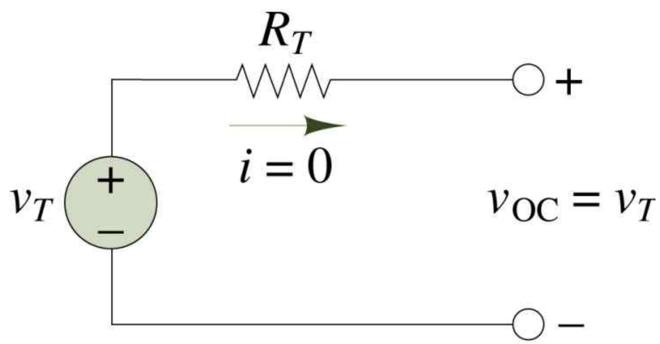
Examples



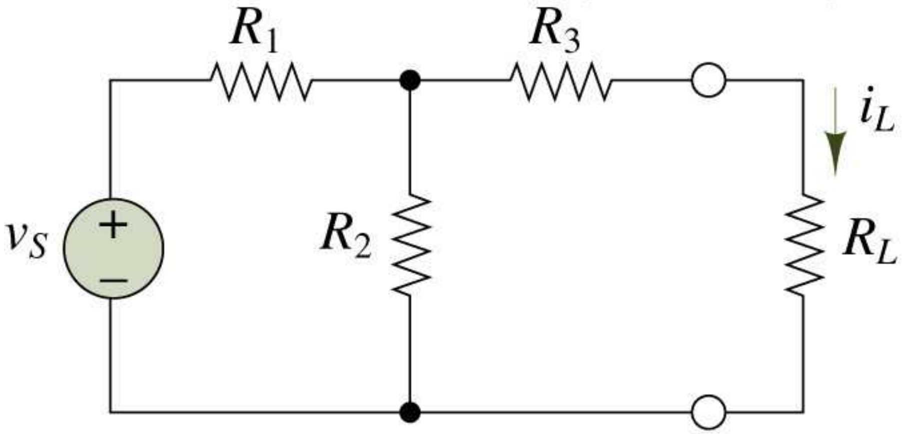
테브닌 전압의 계산

- 테브닌 등가 전압은 부하를 제거하였을 때 부하 단자에 걸리는 개방 전압에 해당한다.
  1. 부하를 제거하여 부하단자를 개방 회로로 만든다.
  2. 개방된 부하 단자에 걸리는 개방 전압 v_{OC}를 정의한다.
  3. v_{OC}를 구하기 위해서 노드 전압법 등의 원하는 방법을 사용한다.
  4. 테브닌 전압은 $v_T = v_{OC}$이다.

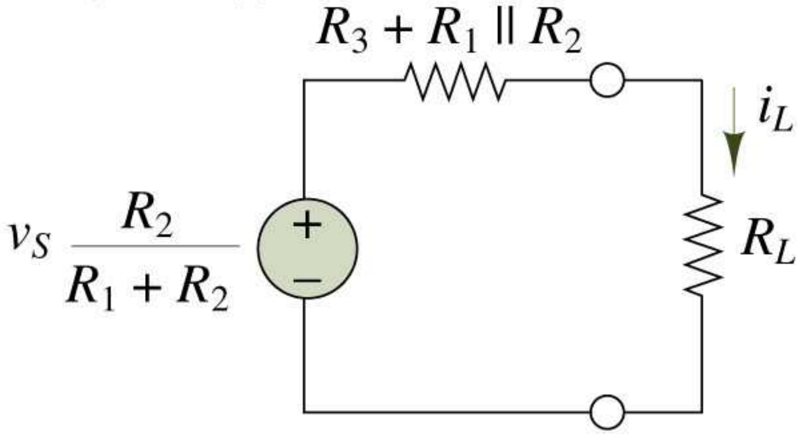




Example

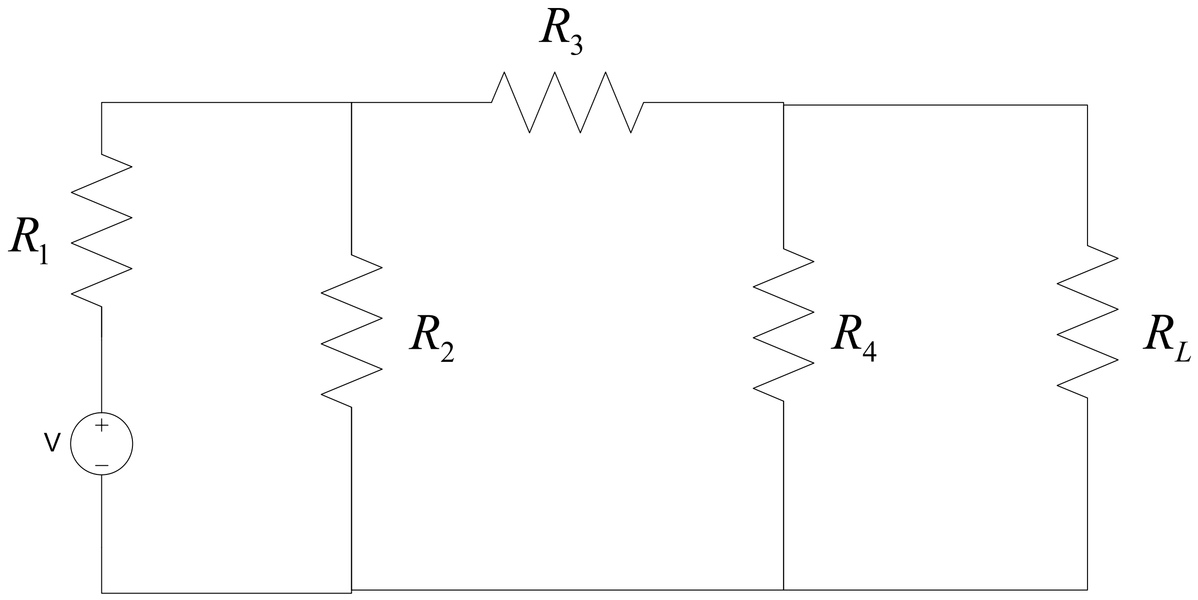


A circuit



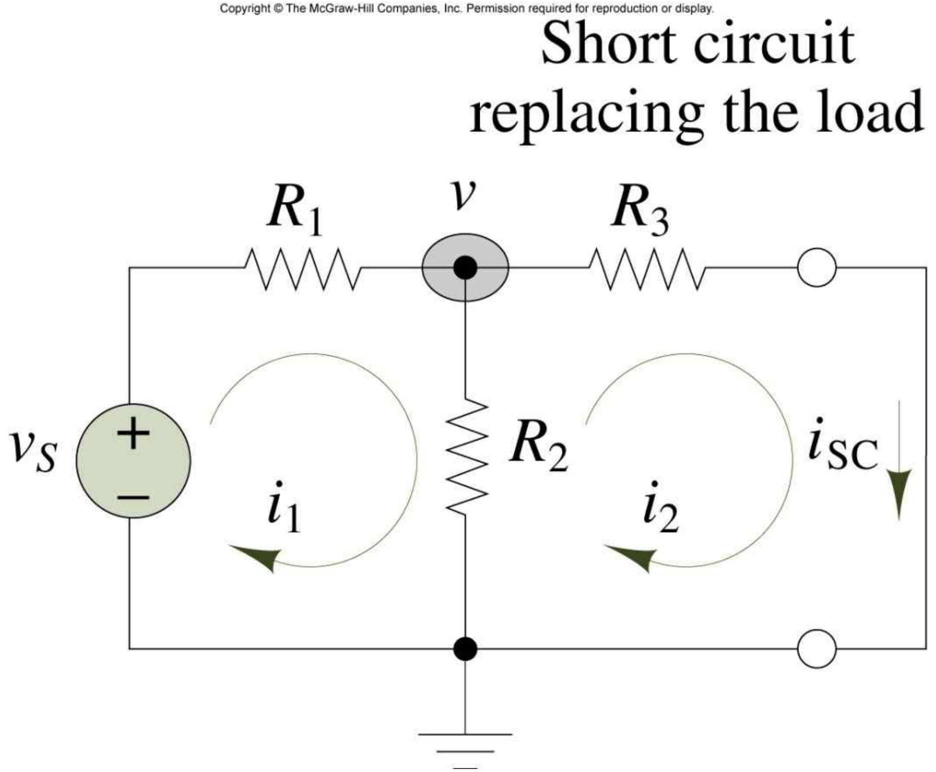
Its Thévenin equivalent

Example



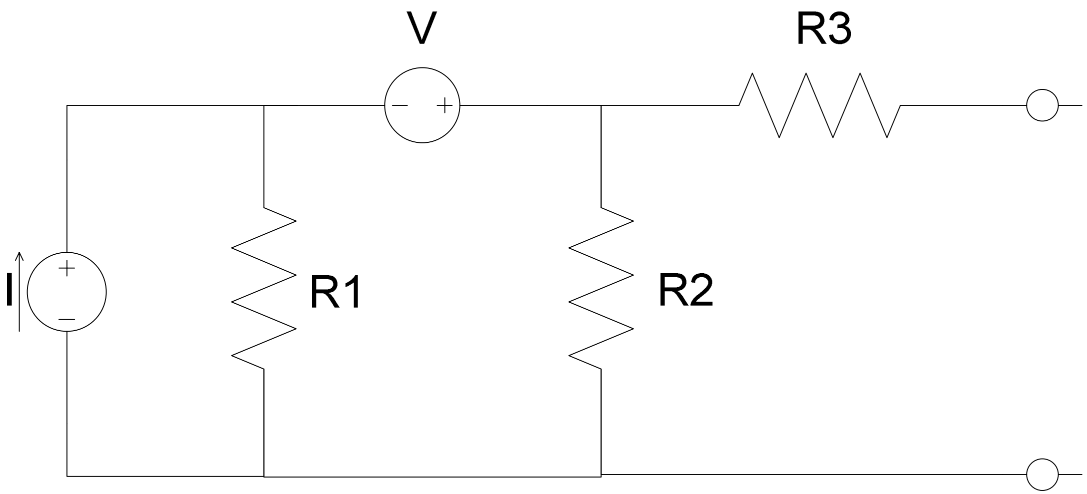
노턴 전류의 계산

- 노턴 등가 전류는 부하를 단락 회로로 대체하였을 때, 이에 흐르는 단락 전류에 해당한다.

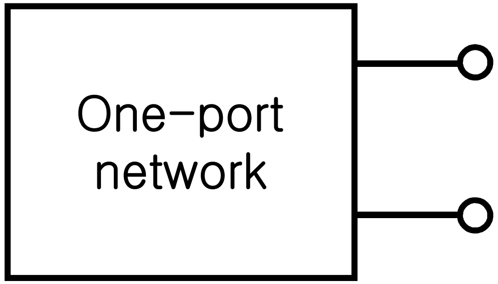


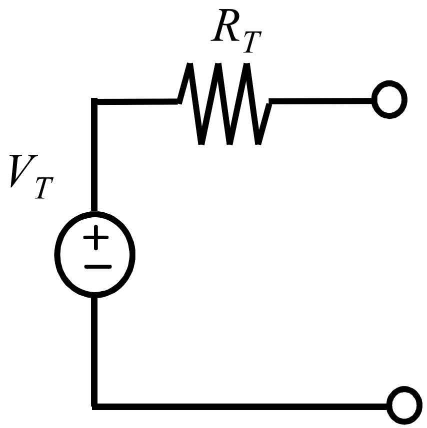
Example

노턴 등가회로

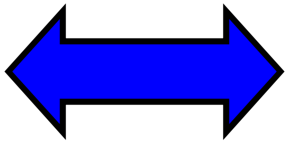


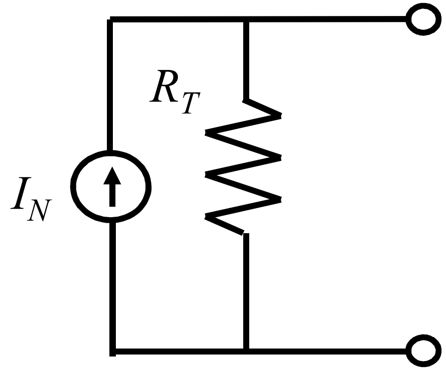
소스 변환 (Source Transformation)



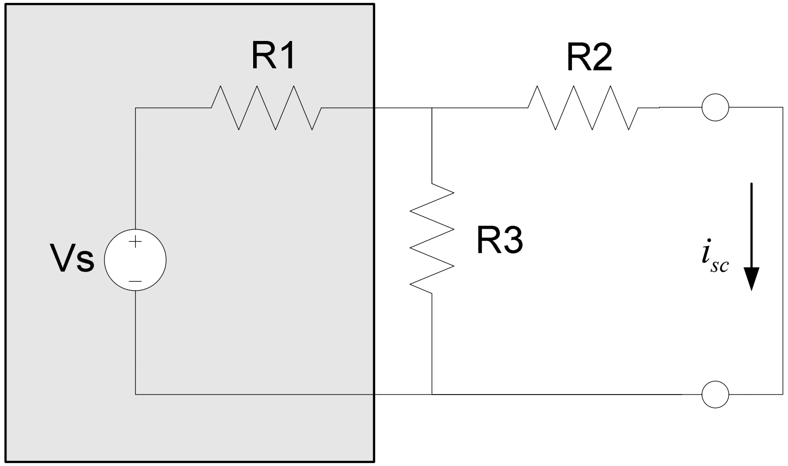


$$V_T = R_T I_N$$

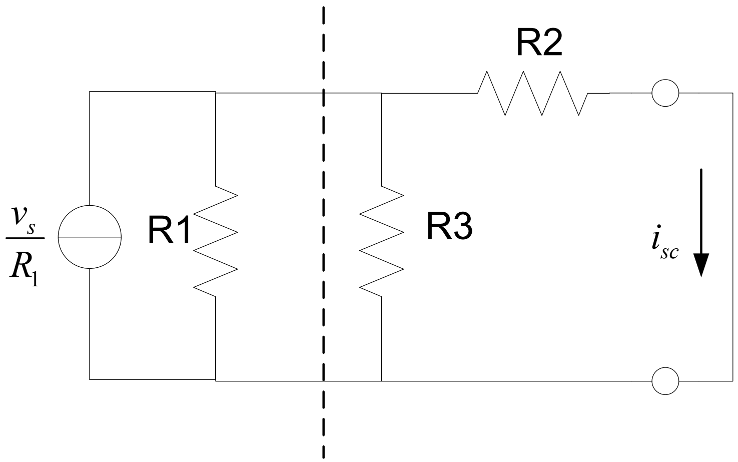




소스변환의 효과



$$i_{sc} = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}\frac{v_s}{R_1}$$

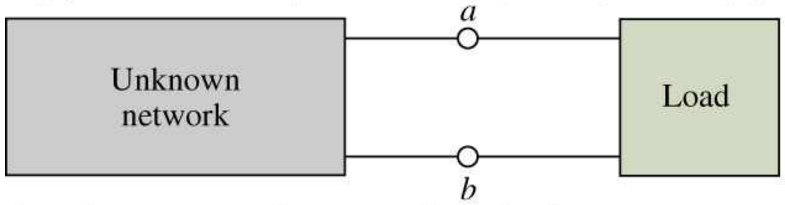


테브닌과 노턴 등가의 실험적 결정

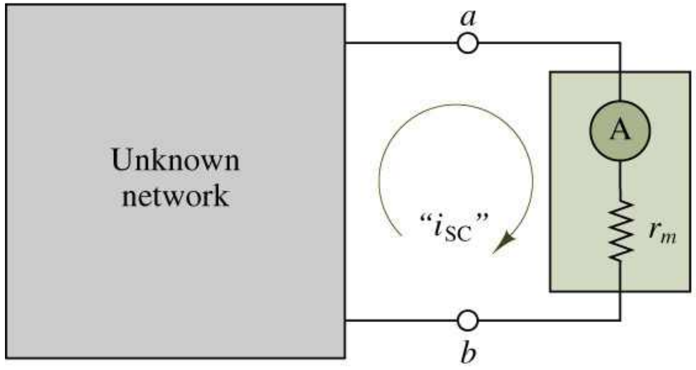
$$R_T = \frac{v_T}{i_N}$$

$$i_N = i_{sc}\left(1 + \frac{r_m}{R_T}\right)$$

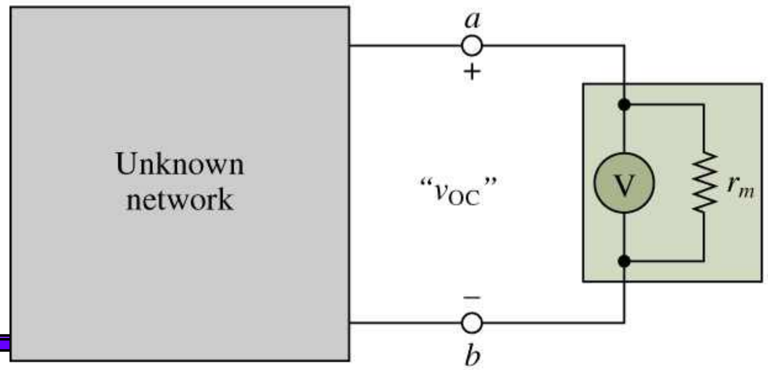
$$v_T = v_{oc}\left(1 + \frac{R_T}{r_m}\right)$$



An unknown network connected to a load

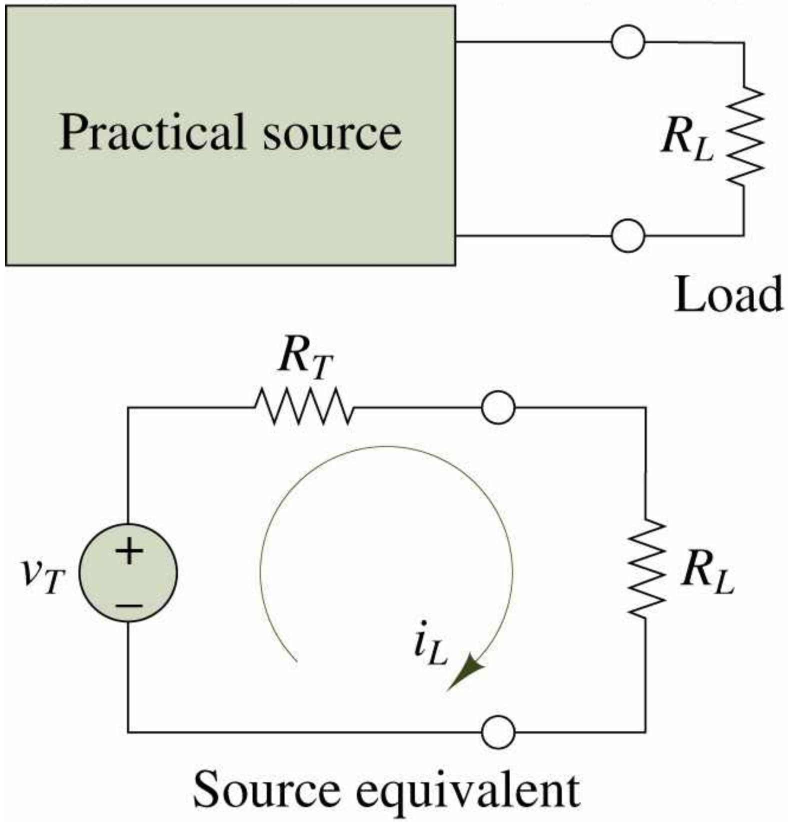


Network connected for measurement of short-circuit current



Network connected for measurement of open-circuit voltage

최대 전력 전달 이론 (Maximum power transfer theorem)



Given v_T and R_T, what value of R_L will allow for maximum power transfer?

소스내의 회로에서도 에너지 소비

$$P_L = i_L^2 R_L,\ i_L = \frac{v_T}{R_L + R_T}$$

$$P_L = \frac{{v_T}^2}{\left(R_L + R_T\right)^2} R_L$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{v_T^2\left(R_L + R_T\right)^2 - 2v_T^2 R_L\left(R_L + R_T\right)}{\left(R_L + R_T\right)^4}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0,\ \left(R_L + R_T\right)^2 - 2R_L\left(R_L + R_T\right) = 0$$

$$R_L = R_T$$