Transient Analysis
과도 해석

Jee-Hwan Ryu

School of Mechanical Engineering
Korea University of Technology and Education

Dynamic Circuits

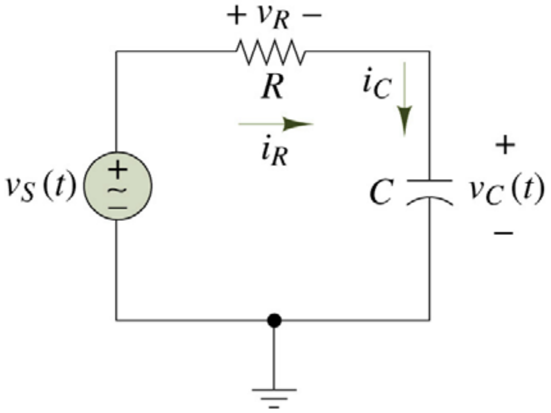
- 커패시터나 인덕터와 같은 에너지 저장 소자(energy-storage element)를 포함하는 회로는 시간에 따라서 전압이나 전류가 변하는 동적 특성을 가지므로, 미분 방정식에 의해서 기술된다.

- 미분 방정식의 차수 = 에너지 저장 소자의 개수

일차 회로

A circuit containing energy-storage elements is described by a differential equation. The differential equation describing the series RC circuit shown is

$$\frac{di_C}{dt} + \frac{1}{RC} i_C = \frac{dv_S}{dt}$$



KVL:

$$v_s(t) - v_R(t) - v_c(t) = 0$$

$$v_s(t) - Ri_c(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c d\tau = 0$$

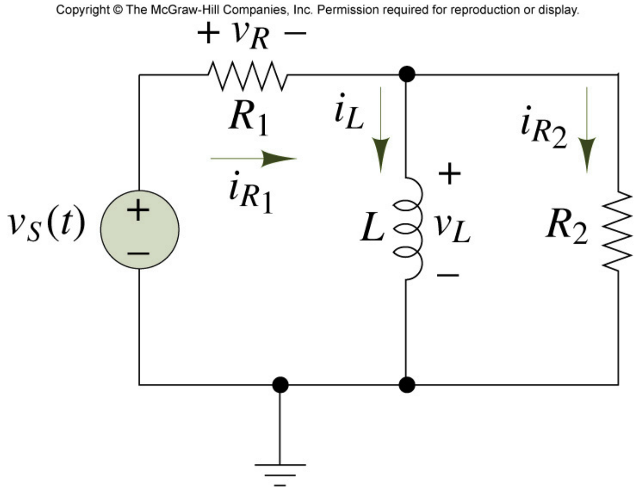
$$\frac{di_c}{dt} + \frac{1}{RC} i_c = \frac{1}{R}\frac{dv_s}{dt}$$

KCL:

$$i_R = \frac{v_s - v_c}{R} = i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC} v_c = \frac{1}{RC} v_s$$

Example



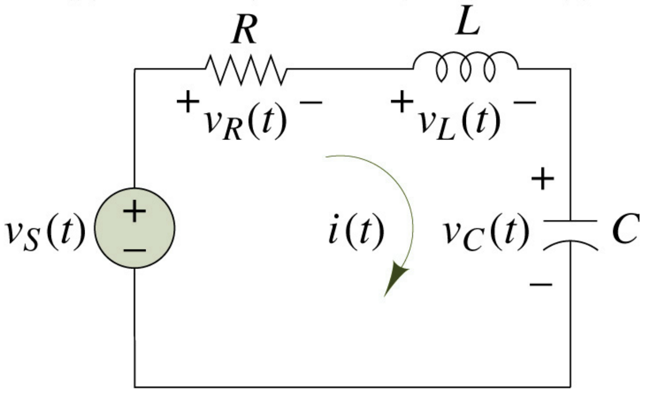
$$i_{R_1} - i_L - i_{R_2} = 0$$

$$\frac{v_s - v_L}{R_1} - i_L - \frac{v_L}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_s}{R_1} - \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt} - i_L - \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L = \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_s$$

2차 회로



$$v_s(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = 0$$

$$R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_s(t)}{dt}$$

or

$$RC\frac{dv_c}{dt} + LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + v_c(t) = v_s(t)$$

DC 정상 상태 해

- DC(전압, 전류) 소스에 오랫동안 연결되어 회로의 전압과 전류가 일정하다고 가정할 수 있는 회로.

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}i_L = \frac{R_2}{L(R_1+R_2)}v_s$$

$$i_L = \frac{1}{R_1}v_s \quad \text{as } t \to \infty$$

$$RC\frac{dv_c}{dt} + LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + v_c(t) = v_s(t)$$

$$v_c = v_s \quad \text{as } t \to \infty$$

DC 정상 상태에서의 Capacitor 와 Inductor

- 직류(DC) 정상 상태에서, 모든 커패시터는 개방 회로처럼 작동하고 모든 인덕터는 단락 회로처럼 작동한다.

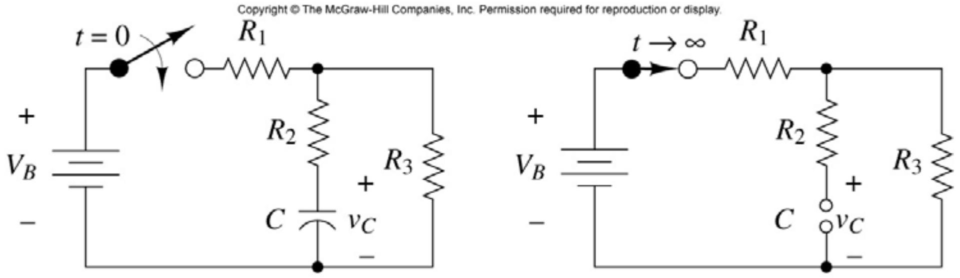
$$i_c(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i_C(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

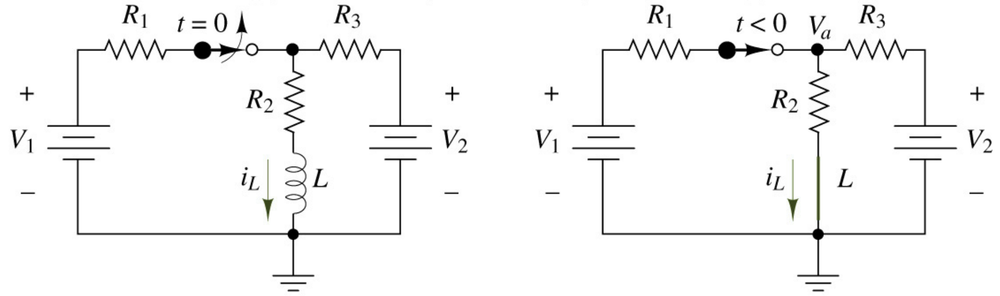
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$v_L(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

초기 조건 과 최종 조건



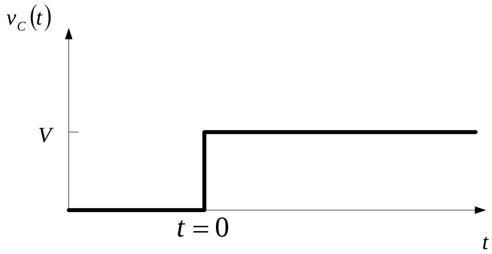
(a) (b)



(a) (b)

커패시터 전압과 인덕터 전류의 연속성

- 커패시터 전압과 인덕터 전류는 순간적으로 변할 수 없다
- 이를 이용하여 회로를 기술하는 미분 방정식에 대한 초기 조건과 최종 값을 쉽게 구할 수 있다.
- 이들 변수의 순간적인 변화는 무한대의 전력을 요구한다.



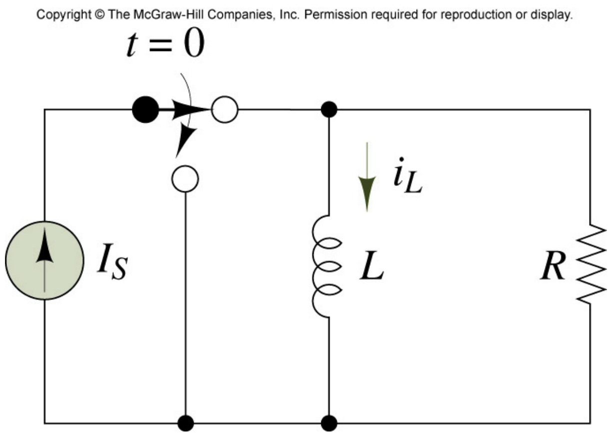
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

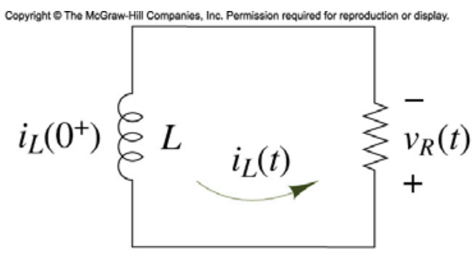
$$i_C(0) = \infty \rightarrow P = \infty$$

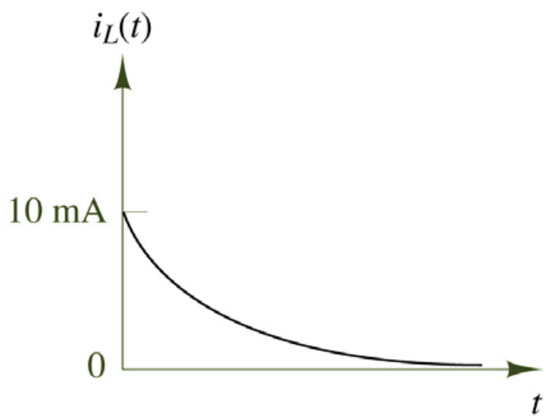
- 스위치 개폐 직전에 인덕터 전류 또는 케패시터 전압의 값은 스위치의 개폐 직후의 값과 동일하다.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-),\ \ i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Example







$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_S$$

1차 과도 응답의 방법 및 절차

- 스위치 변화가 발생하기 전 $(t=0^-)$과 과도 응답이 소멸된 후 $(t \to \infty)$의 정상상태 응답을 구한다. 보통 이러한 응답들을 $x(0^-), x(\infty)$로 나타낸다.
- 커패시터 전압과 인덕터 전류의 연속성을 이용하여 초기값을 규정한다. $\left[v_C = v_C(0^-), i_L = i_L(0^-)\right]$
- 스위치가 위치를 바꾼 직후인 $t=0^+$에 대한 미분방정식을 작성한다. 미분 방정식의 변수는 커패시터 전압 $v_C(t)$나 인덕터 전류 $i_L(t)$가 될 수 있다. 에너지 저장소자를 테브닌(노턴)에서 부하로 취급하여 테브닌식이나 노턴식의 형태로 바꾸는 것이 유용하다.
- 회로의 시상수를 구한다. $\tau = R_T C,\ \tau = L/R_T$
- 다음 형태로 완전해를 작성한다.

$$x(t) = x(\infty) + \left[x(0) - x(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

1차 회로의 자연응답

- 1차 미분방정식의 일반형태

Time constant　　DC gain

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K_S F \quad t \geq 0,\ x(t=0) = x(0)$$

- 자연응답: 강제함수를 0으로 놓은 상태의 응답

$$\tau \frac{dx_N(t)}{dt} + x_N(t) = 0$$

$$\frac{dx_N(t)}{dt} = -\frac{x_N(t)}{\tau}$$

$$x_N(t) = \alpha e^{-t/\tau}$$

- 만일 시스템에 외부적인 강제함수가 없으면

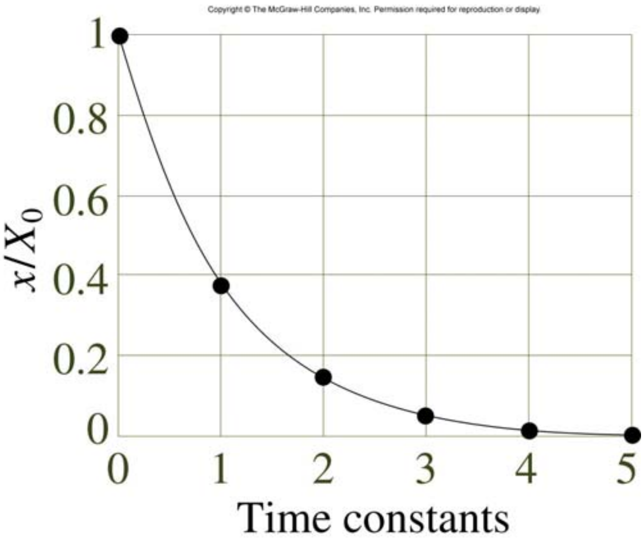
$$\alpha = x(0)$$

1차 시스템과 시상수

- 시상수의 수에 대해 1차 회로의 전류 또는 전압의 지수 감쇠

$$x(t) = x(0)e^{-t/\tau}$$

$\frac{x(t)}{x(0)}$	$n = \frac{t}{\tau}$
1	0
0.3679	1
0.1353	2
0.0498	3
0.0183	4
0.0067	5



강제 응답 및 완전응답

- DC 소스에 의한 강제응답

$$\tau \frac{dx_F(t)}{dt} + x_F(t) = K_S F \quad t \geq 0$$

$$x_F(t) = x(\infty) = K_S F \quad t \geq 0$$

- 완전응답 = 자연응답 + 강제응답

$$x(t) = x_N(t) + x_F(t) = \alpha e^{-t/\tau} + K_S F = \alpha e^{-t/\tau} + x(\infty) \quad t \geq 0$$

- 초기조건을 사용한 미지상수의 해

$$x(t=0) = x(0) = \alpha + x(\infty)$$

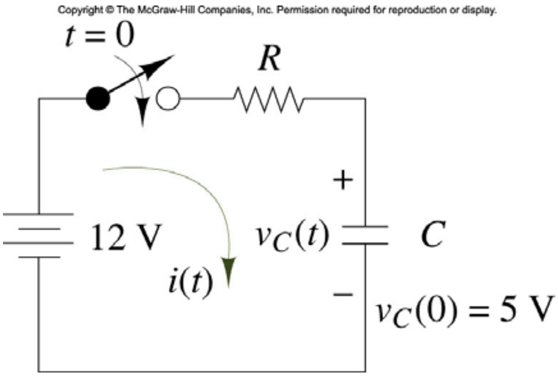
$$\alpha = x(0) - x(\infty)$$

- 완전 응답

$$x(t) = [x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau} + x(\infty) \quad t \geq 0$$

Example

- 커패시터 전압에 대한 표현을 결정하라



$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=V_B$$

$$\tau = RC,\ x(0)=5V,\ x(\infty)=12V$$

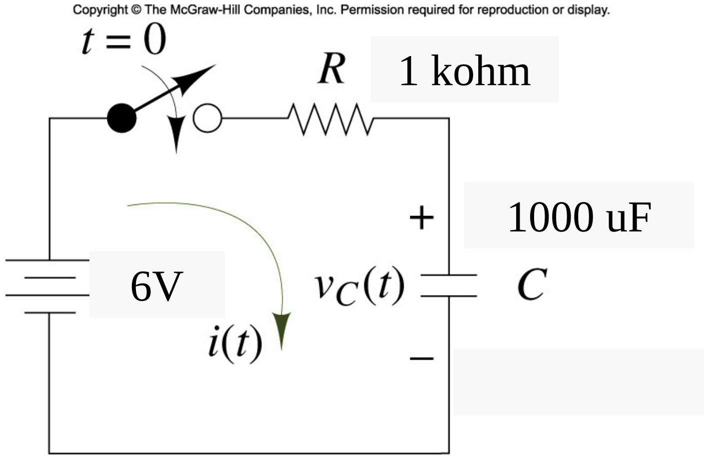
$$v_C(t)=12+(5-12)e^{-t/\tau}=\text{정상상태응답}+\text{과도응답}$$
$$=5e^{-t/\tau}+12(1-e^{-t/\tau})=\text{자연응답}+\text{강제응답}$$

Example

- 앞의 예제에서 만일 초기조건이 0 V 라면 ?

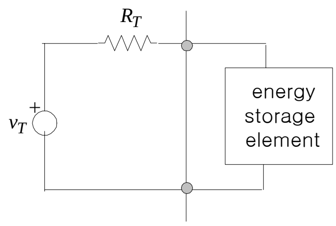
Example

- 카메라 플래쉬 전등에 에너지를 저장하기 위해서 캐패스터가 사용된다. 6V 배터리에서 에너지 저장이 최대 90%에 도달하기 위해 필요한 시간을 초단위로 계산하라.

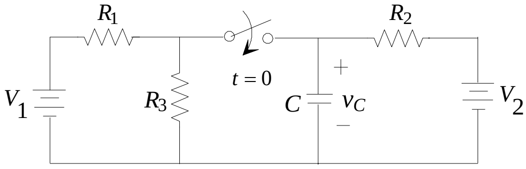


테브닌 또는 노턴 등가회로의 이용

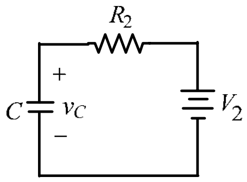
- 에너지 저장 소자를 부하로 취급하며, 스위칭 동작 전후에 에너지 저장 소자가 보는 테브닌 등가 회로를 구하여라.
- 스위칭 전의 등가 회로 → IC의 계산
- 스위칭 후의 등가 회로 → 정상 상태 값과 시정수의 계산
- 절차
  1. IC를 결정한다. 이를 위해서 필요하다면, 스위칭 전의 회로에 대해서 테브닌 등가를 구한다.
  2. 필요하다면, 스위칭 후의 회로에 대해서 테브닌 등가를 구한다.
  3. 스위칭 후의 회로에 대해서 미분 방정식을 수립한다.
  4. 시정수를 계산한다.
  5. 완전 응답을 구한다.
  6. IC를 완전 응답에 적용하여 미정 계수를 결정한다



Example

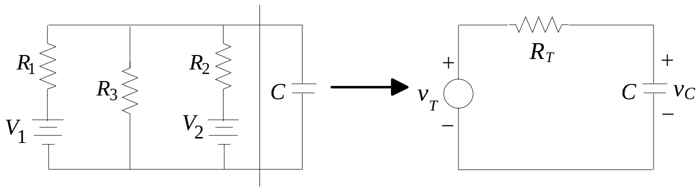


1) IC 단계



$$V_2\text{:DC voltage} \Rightarrow v_C(0^-) = V_2 \Rightarrow v_C(0^+) = V_2$$

2) 스위칭 후의 테브닌 등가



$$R_T = R_1 \| R_2 \| R_3$$

$$v_T = \frac{R_2 \| R_3}{(R_2 \| R_3) + R_1} V_1 + \left(1 - \frac{R_2}{(R_1 \| R_3) + R_2}\right) V_2 = \frac{R_2 R_3 V_1 + R_3 R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Example cont.

3) 미분 방정식

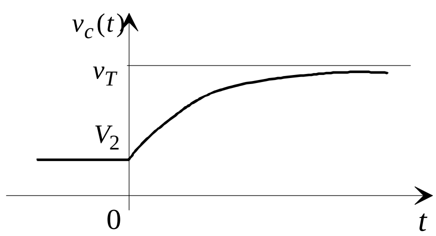
$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R_T C} v_C(t) = \frac{1}{R_T C} v_T$$

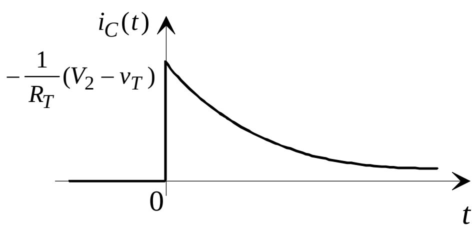
4) 시정수

$$\tau = R_T C = (R_1 \| R_2 \| R_3) C$$

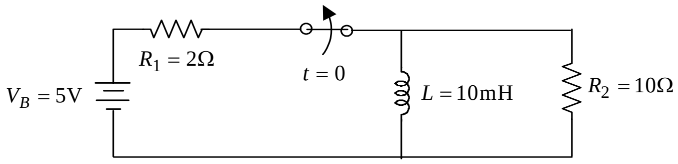
5) 완전응답

$$v_C(t) = (V_2 - v_T) e^{-t/R_T C} + v_T \quad \& \quad i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{R_T}(V_2 - v_T) e^{-t/R_T C}$$

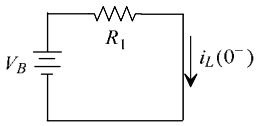




Example



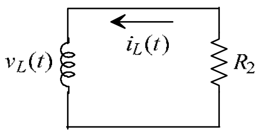
1) IC 단계



$$i_L(0^-) = \frac{V_B}{R_1} = \frac{5}{2} = 2.5\text{A}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5\text{A}$$

2) t>= 0 미분 방정식



$$\begin{cases} \text{KVL} : -v_L(t) - i_L R_2 = 0 \\ \text{Inductor} : v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L(t) = 0$$

Example cont.

3) 시정수

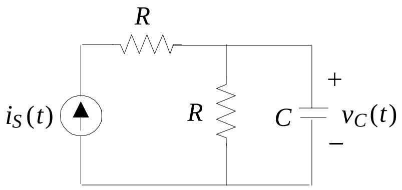
$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{10 \times 10^{-3}}{10} = 10^{-3}(\text{sec})$$

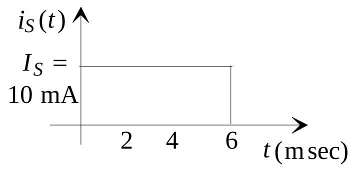
4) 강제 응답은 없으며 자연응답만이 존재

$$i_L(t) = Ke^{-t/\tau} \ \& \ \text{IC: } i_L(0^+) = 2.5\text{A} \longrightarrow \underline{i_L(t) = 2.5e^{-1000t}(\text{A})}$$

$$v_L(t) = L\frac{d\,i_L(t)}{dt} = 10 \times 10^{-3} \times 2.5 \times (-1000)e^{-1000t} = -25e^{-1000t}(\text{V})$$

Example





$R = 1\mathrm{K}\Omega$

$C = 1\mu\mathrm{F}$

$v_C(t) = 0$ for $t < 0$

$0^+ < t < 0.006$ sec

1) IC

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

2) 테브닌 등가

$$R_T = R \text{ and } v_T = R\,I_S$$

3) 시정수

$$\tau = R_T C = RC = 1000 \times 1 \times 10^{-6} = 1(\mathrm{msec})$$

4) 최종조건

$$v_C(\infty) = R i_S(\infty) = 1000 \times 10 \times 10^{-3} = 10(\mathrm{V})$$

Example cont.

5) 완전응답

$$v_C(t) = v_C(\infty) + \left(v_C(0) - v_C(\infty)\right)e^{-t/R_T C} = 10 + \left(0 - 10\right)e^{-t/0.001}(\mathrm{V})$$

$$v_C(t) = 10(1 - e^{-t/0.001})(\mathrm{V})\text{for } 0 \le t < 0.006\mathrm{sec}$$

전류원은 6msec 후에 0이 되지만, 6msec 전의 회로의 응답은 이러한 사실에 상관 없이
마치 전류원이 계속 유지된다고 가정하여 구하면 된다

$t > 0.006\mathrm{sec}$

6) IC

$$v_C(0.006^+) = v_C(0.006^-) = 10(1 - e^{-0.006/0.001}) = 9.975(\mathrm{V})$$

7) 최종조건

$$v_C(\infty) = 0$$

Example cont.

8) 완전응답

$$v_C(t) = v_C(\infty) + \left(v_C(0) - v_C(\infty)\right)e^{-(t-t_0)/\tau} = 0 + (9.975 - 0)e^{-(t-0.006)/0.001}(\mathrm{V})$$

$$v_C(t) = 9.975\ e^{-(t-0.006)/0.001}\ (\mathrm{V}) \quad \text{for } t \geq 0.006 \text{ sec}$$